משוואות דיפרנציאליות

4 ביולי 2026

תוכן עניינים

1 משוואות דיפרנציאליות רגילות 3
1.1 הגדרות בסיסיות 3
1.2 קיום ויחידות 4
1.3 תלות בתנאי ההתחלה 7
1.4 משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים 11
1.5 התנהגות לוקלית, התנהגות גלובלית ויציבות 17
2 מערכות שטורם־ליוביל (לא בחומר למבחן) 24
2.1 מוטיבציה קצרה 24
2.2 משוואות עם תנאי שפה 24
2.3 ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות 27
3 משוואות דיפרנציאליות חלקיות 31
3.1 משוואת לפלס 31
3.2 בעיית דיריכלה 34
3.3 שיטת Perron לפתרון בעיית דיריכלה 35
3.4 תנאי שפה 38

1 משוואות דיפרנציאליות רגילות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1 משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר n

משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר n היא משוואה מהצורה

$$F\big(x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t), t\big) = 0$$

כאשר t משתנה זמן חופשי היכן ש־$F : \Omega \to \mathbb{R}$ כאשר $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ קבוצה פתוחה.
פיתרון של המשוואה בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא פונקציה $x : I \to \mathbb{R}$ אשר גזירה n פעמים כך ש־x מקיים את המשוואה לכל $t \in I$.
באופן דומה, מערכת של m משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר n היא מערכת משוואות מהצורה

$$F\big(x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t), t\big) = 0$$

עבור $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)m+1} \to \mathbb{R}^n$ ופתרון שלה בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא פונקציה גזירה n פעמים $x : I \to \mathbb{R}^m$ שפותרת את המשוואה בכל $t \in I$.

הגדרה 1.2 מערכת/משוואה אוטונומית

נאמר שהמערכת / משוואה היא אוטונומית אם F אינה תלויה ב־t.

הגדרה 1.3 מערכת משוואות לינארית

נאמר שמשוואה דיפרנציאלית היא לינארית אם יש פונקציות $c_0, c_1, ..., c_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$F(x(t), x'(t), ..., x^n(t), t) = c_0(t)x(t) + c_1(t)x'(t) + \cdots + c_n(t)x^n(t) + f(t)$$

אם כל ה־c_i־ים לא תלויים ב־t נאמר שהמשוואה במקדמים קבועים ואם $f(t) = 0$ נאמר שהמשוואה הומוגנית.

הערה

נשים לב שבמשוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית כל צירוף לינארי של פתרונות הוא פתרון. שכן, אם למשל $x_1, ..., x_m$ פתרונות למשוואה לינארית הומוגנית ו־$\alpha_1, ..., \alpha_m$ סקלרים, אזי

$$g(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i(t)$$

הוא צירוף לינארי של פתרונות.
נציב את הפונקציה במשוואה כדי לקבל את הביטוי $\sum_{j=0}^{n} c_j(t)(g^j(t))$ ונרצה להראות שתוצאתו היא 0: ואכן, מתוך לינאריות הנגזרת והחלפת סדר הסכימה נקבל

$$\sum_{j=0}^{n} c_j(t)(g^j(t)) = \sum_{j=0}^{n} c_j(t)\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i^j(t)\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{n} c_j(t) x_i^j(t)\right)$$

מכיוון שכל הפונקציות x_i הן פתרונות של המשוואה ההומוגנית, הסכום הפנימי בסוגריים שווה ל־0 לכל i. לכן מתקבל:

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot 0 = 0$$

ומכאן שגם $g(t)$ פותרת את המשוואה, כנדרש.

הערה

באינפ׳2 פתרנו משוואות מהצורה $x'(t) = f(t)$.
אם יודעים לחשב פונקציה קדומה ל־f אז נוכל לכתוב $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s$ מהמשפט היסודי ($x(t_0)$ זה מידע שתמיד היינו צריכים לקבל מאיפשהו).
לכן, גם בקורס הזה כשנתבונן במשוואות דיפרנציאליות תמיד נקבע את תנאי ההתחלה $x(0) = x_0$ וננסה לפתור את המשוואה עם הנתון הזה. זה נקרא **בעיית התחלה**.

1.2 קיום ויחידות

משפט 1.4

נניח שנתונה מערכת m משוואות דיפרנציאליות מסדר n כאשר $x^{(n)}(t) = F\big(x, x', ..., x^{(n-1)}, t\big)$ עבור $F : U \to \mathbb{R}^m$ כאשר $U \subseteq R^{nm+1}$.
אז יש מערכת מסדר 1, $y'(t) = G(y,t)$ עבור $G : V \to \mathbb{R}^{nm}$ כאשר $V \subseteq \mathbb{R}^{nm+1}$ כך שאם x פתרון למערכת המקורית אז $y = \big(x, x', ..., x^{(n-1)}\big)$ הוא פתרון למערכת החדשה ואם y פתרון למערכת החדשה אזי $x = y_0$ הוא פתרון למערכת המקורית ולכל $0 \le i \le n-2$ מתקיים $y_i' = y_{i+1}$ כאשר y_i וקטור.

סוף הרצאה 1 – 23/03

הוכחה: נסמן ב־I את $x^{(n)}(t) = F\big(x, x', ..., x^{(n-1)}, t\big)$ וב־II את $y'(t) = G(y,t)$.
נגדיר את המערכת $y'(t) = G(y(t), t)$ על־ידי

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = F(y_0, y_1, ..., y_{n-1}, t) \end{cases}$$

יש לנו n משוואות שכל משוואה בגודל m וקל לבדוק שהתנאים הנדרשים מתקיימים, נראה זאת

1. **כיוון ראשון ($I \to II$):** נניח ש־$x(t)$ הוא פתרון של המערכת המקורית I.
נגדיר וקטור $y(t)$ על ידי הרכיבים $y_i(t) = x^{(i)}(t)$ לכל $0 \le i \le n-1$. נוכיח ש־$y(t)$ מקיים את מערכת II:
   1. לכל $0 \le i \le n-2$, מתקיים מההגדרה ש־$y_i'(t) = \big(x^{(i)}(t)\big)' = x^{(i+1)}(t) = y_{i+1}(t)$. אלו הן $n-1$ המשוואות הראשונות במערכת החדשה
   2. עבור הרכיב האחרון, מתקיים $y_{n-1}'(t) = \big(x^{(n-1)}(t)\big)' = x^{(n)}(t)$. מכיוון ש־$x(t)$ הוא פתרון של המערכת המקורית I, נציב את הביטוי שלו ונקבל

$$y_{n-1}'(t) = F\big(x, x', ..., x^{(n-1)}, t\big) = F(y_0, y_1, ..., y_{n-1}, t)$$

לכן, הוקטור $y(t)$ שנבנה פותר את המערכת החדשה II.

2. **כיוון שני ($II \to I$):** נניח ש־$y(t) = (y_0, y_1, ..., y_{n-1})$ הוא פתרון של המערכת החדשה II.
נגדיר פונקציה $x(t) = y_0(t)$ ונוכיח שהיא פותרת את המערכת המקורית I:
   1. מהמשוואה הראשונה של המערכת II נובע ש־$y_0' = y_1$, ולכן $x' = y_1$
   2. מהמשוואה השנייה נובע ש־$y_1' = y_2$, ולכן בגזירה חוזרת נקבל $x^{(2)} = (y_1)' = y_2$
   3. באופן אינדוקטיבי, לכל $0 \le i \le n-1$ מתקיים ש־$x^{(i)}(t) = y_i(t)$
   4. כעת נביט במשוואה האחרונה במערכת II: $y_{n-1}'(t) = F(y_0, y_1, ..., y_{n-1}, t)$
מצד שמאל, $y_{n-1}' = \big(x^{(n-1)}\big)' = x^{(n)}$. מצד ימין, נציב את הקשרים שמצאנו ($y_i = x^{(i)}$) ונקבל בדיוק

$$x^{(n)}(t) = F\big(x, x', ..., x^{(n-1)}, t\big)$$

משמע ש־$x(t)$ הוא פתרון למערכת המקורית I.

□

בתרגיל הבית נראה באופן דומה שאפשר לכל מערכת לא אוטונומית לבנות מערכת שקולה שכן אוטונומית ולכן מעתה נעסוק במערכות של משוואות דיפרנציאליות רגילות אוטונומיות מסדר 1.
טבעי לשאול מהם התנאים שמבטיחים קיום פתרון למשוואות דיפרנציאליות.

משפט 1.5 משפט הקיום של פיאנו

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $F : U \to \mathbb{R}^n$ רציפה ו־$\widetilde{x_0} \in U$ נקודת התחלה.
אז יש $\delta > 0$ ופונקציה גזירה $x : (-\delta, \delta) \to U$ שפותרת את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x(0) = \widetilde{x_0} \\ x'(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

הערה

תנאי המשפט לא מבטיחים יחידות.

הוכחה: יהי $r > 0$ כך ש־$B := \overline{B(\widetilde{x_0}, r)} \subseteq U$ ונסמן

$$M = \|F|_B\|_\infty = \sup_{x \in B} |F(x)|$$

נגדיר $\delta = \frac{r}{M}$ ואת סדרת הפונקציות $x_n : [-\delta, \delta] \to U$ על־ידי

1. $x_0(t)$ תהיה הפונקציה הקבועה $x_0(t)=\widetilde{x_0}$ לכל $t\in[-\delta,\delta]$
2. $x_1(t)$ מוגדרת על־ידי $x_1(t)=x_0+tF(\widetilde{x_0})$
3. $x_2(t)=\left\{\widetilde{x_0}+tF(\widetilde{x_0})\quad t\in\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right],t\in\left[\frac{\delta}{2},\delta\right],x_2\left(-\frac{\delta}{2}\right)+\left(t+\frac{\delta}{2}F\left(x_2\left(-\frac{\delta}{2}\right)\right)\right),t\in\left[-\delta,-\frac{\delta}{2}\right]\right)$

(זה נראה קצת מסובך אבל בעצם מה שעשינו פה זה שבנינו ישר לינארי)

4. באופן כללי נקבל עבור $1\le j\le k-1$

$$x_k(t)=\begin{cases}\widetilde{x_0}+tF(\widetilde{x_0}) & t\in\left[-\frac{\delta}{k},\frac{\delta}{k}\right]\\ x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)+\left(t-\frac{j\delta}{k}\right)F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right) & t\in\left[\frac{j\delta}{k},\frac{(j+1)\delta}{k}\right]\\ x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right)+\left(t+\frac{j\delta}{k}\right)F\left(x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right)\right) & t\in\left[-\frac{(j+1)\delta}{k},-\frac{j\delta}{k}\right]\end{cases}$$

(מספיק לבנייה במבחן כמובן 1 ו־4).

נשים לב ש־$x_k(t)$ לינארית למקוטעין ב־t ולכן גזירה פרט למספר סופי של נקודות ותמונתה נמצאת בכדור B, כלומר $Im(x_k)\in B$ לכל $0<\delta<t$ ומתקיים

$$\begin{aligned}\|x_k(t)-\widetilde{x_0}\|&=\left\|\int_0^t x_k'(s)\,\mathrm{d}s\right\|\\&\underset{\triangle}{\le}\int_0^\delta\|x_k'(s)\|\,\mathrm{d}s\\&=\int_0^{\frac{\delta}{k}}\|F(\widetilde{x_0})\|\,\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{\frac{j\delta}{k}}^{\frac{(j+1)\delta}{k}}\left\|F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right)\right\|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

באופן רקורסיבי ניתן להראות שלכל j מתקיים $x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\in B$ ולכן $\left\|F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right)\right\|\le M$ ונקבל לבסוף

$$\begin{aligned}\|x_k(t)-\widetilde{x_0}\|&\le\int_0^{\frac{\delta}{k}}\|F(\widetilde{x_0})\|\,\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{\frac{j\delta}{k}}^{\frac{(j+1)\delta}{k}}\left\|F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right)\right\|\mathrm{d}s\\&\le M\cdot\frac{\delta}{k}+\sum_{j=1}^{k-1}M\left(\frac{(j+1)\delta}{k}-\frac{j\delta}{k}\right)\\&\le M\cdot\delta\\&=r\end{aligned}$$

סוף הרצאה 2 – 24/03

באופן זהה נקבל גם עבור $-\delta<t<0$ ולכן הסדרה $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ חסומה במידה שווה (שכן כולן בתוך B) והן רציפות במידה אחידה שכן לכל k מתקיים

$$\|x_k(t)-x_k(s)\|\le M|t-s|$$

אז הסדרה רציפה במידה אחידה ולכן ממשפט ארצלה אסקולי יש לסדרה תת־סדרה $\left(x_{k_j}\right)_{j=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה לגבול x ולשם הפשטות נקרא לתת־סדרה זו $(x_k)_{k=1}^\infty$ במקום $\left(x_{k_j}\right)_{j=1}^\infty$.

נרצה להראות ש־x גזירה ומקיימת $x'(t)=F(x(t))$ ומכך ש־F רציפה מהמשפט היסודי מספיק להראות

$$x(t)=\widetilde{x_0}+\int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

ואכן, לכל k נגדיר את $x_k:[-\delta,\delta]\to U$ ולכל $1\le j<k$ על־ידי

$$Y_k(s)=\begin{cases}\widetilde{x_0} & s\in\left[-\frac{\delta}{k},\frac{\delta}{k}\right]\\ x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right) & s\in\left[\frac{\delta j}{k},\frac{(j+1)\delta}{k}\right]\\ x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right) & s\in\left[-\frac{(j+1)\delta}{k},-\frac{j\delta}{k}\right]\end{cases}$$

אז לכל k מתקיים $x_k(t)=\widetilde{x_0}+\int_0^t F(Y_k(s))\,\mathrm{d}s$ ומתקיים

$$\|Y_k-x_k\|_\infty\le\frac{M\delta}{k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

אז (Y_k) מתכנסת במידה שווה לאורך אותה תת־סדרה ל־x.

יתר על־כן, $F\circ Y_k\to F\circ x$ במידה שווה לאורך התת־סדרה שכן F רציפה במידה שווה ב־B: כי אם $\varepsilon>0$, קיימת $\eta>0$ כך שלכל $p,q\in B$ מתקיים $\|p-q\|<\eta$

ומתקיים $\|F(p)-F(q)\|<\varepsilon$.
ניקח L_0 כך שלכל $\ell>L_0$ ולכל $t\in[-\delta,\delta]$ מתקיים $\left\|Y_{k_\ell}(t)-x(t)\right\|<\eta$ כי ההתכנסות במידה שווה אבל אז לכל $\ell>L_0$ מתקיים $\left\|F\left(Y_{k_\ell}(t)\right)-F(x(t))\right\|<$ ε ומכך שרציפות במידה שווה מאפשרת להחליף סדר של גבול ואינטגרל

$$x(t)=\lim_{\ell\to\infty}x_{k_\ell}(t)=\widetilde{x_0}+\lim_{\ell\to\infty}\int_0^t F\left(Y_{k_\ell}(s)\right)\mathrm{d}s=\widetilde{x_0}+\int_0^t\lim_{\ell\to\infty}F\left(Y_{k_\ell}(s)\right)\mathrm{d}s=\widetilde{x_0}+\int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

□

מסקנה 1.6

אם $U\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ קבוצה פתוחה ו־$F:U\to\mathbb{R}$ רציפה אז לכל $(y_0,y_1,...,y_{n-1},t_0)\in U$ יש $\delta>0$, $x:[t_0-\delta,t_0+\delta]\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\begin{cases}x(t_0)=y_0\\x'(t_0)=y_1\\\vdots\\x^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}\\x^{(n)}(t)=F(x(t),x'(t),...,x^{(n-1)}(t),t)\end{cases}$$

הוכחה: מכוון שכל משוואה לא אוטונומית מסדר n ניתן להמיר למערכת משוואות אוטונומית מסדר 1 ואז עם משפט 1.4 נקבל את הנדרש. □

לא ראינו בתנאים שניסחנו יחידות של הפתרון ואם הפתרון בתנאים האלו הוא בהכרח יחיד ואכן לא כך הדבר.

דוגמה

$$x'(t)=2\sqrt{|x(t)|}\implies F(x)=2\sqrt{|x|}$$

זו פונקציה $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ויש שני פתרונות $x=0$ ו־$x(t)=t^2$ ואלו שני פתרונות שלא מתלכדים על אף סביבה של 0.

יחד עם זאת, ניתן למצוא תנאים ליחידות וזהו משפט פיקארד.

משפט 1.7 משפט פיקארד

תהיי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $\widetilde{x_0}\in\mathbb{R}^n$ ותהיי $F:U\to\mathbb{R}^n$ שהיא ליפשיצית מקומית כלומר לכל $K\subseteq U$ קומפקטית יש קבוע L_K כך ש־$F|_K$ ליפשיצית עם הקבוע L_K.
אזי יש $\delta>0$ כך שקיים **פתרון יחיד** בקטע $[-\delta,\delta]$ לבעיה

$$\begin{cases}x(0)=\widetilde{x_0}\\x'(t)=F(x(t))\end{cases}$$

ישנן שתי הוכחות למשפט – אחד באמצעות משפט העתקה מכווצת שראינו בתרגול ואחת מההרצאה.
הוכחה של יונתן בהרצאה: משפט פיקארד נובע מהלמה הבאה בעזרת משפט פיאנו.

למה 1.8

תהיי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F:U\to\mathbb{R}^n$ ליפשיצית מקומית.
נניח ש־$x(t)$ ו־$y(t)$ שני פתרונות של המשוואה $\eta'(t)=F(\eta(t))$ כך ש־x מוגדר על הקטע הפתוח $I\subseteq\mathbb{R}$ ו־y מוגדר על הקטע הפתוח $J\subseteq\mathbb{R}$.
אם $0\in I\cap J$ ו־$x(0)=y(0)$ אזי $x(t)=y(t)$ לכל $t\in I\cap J$.

הוכחה: נוכיח ש־$x(t)=y(t)$ לכל $t\in I\cap J\cap[0,\infty)$. נניח שלא ככה ונגדיר $\tau=\inf\{t\in I\cap J\cap(0,\infty)\mid x(t)\neq y(t)\}$ ומרציפות $\overline{x}=x(\tau)=y(\tau)$.
ניקח $r>0$ כך ש־$\overline{B_{2r}(\overline{x})}\subseteq U$ וניקח $\delta>0$ כך שיתקיים $[\tau,\tau+\delta]\subseteq I\cap J$ וגם $x(t),y(t)\in\overline{B_r(\overline{x})}$ לכל $t\in[\tau,\tau+\delta]$.
נסמן ב־L את קבוע ליפשיץ של $F|_{\overline{B_r(\overline{x})}}$, עבור $t\in[\tau,\tau+\delta]$ מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t)-y(t)\|^2&=2(x(t)-y(t),x'(t)-y'(t))\\&=2(x(t)-y(t),F(x(t))-F(y(t)))\\&\underset{(\star)}{\leq}2\|x(t)-y(t)\|\cdot\|F(x(t))-F(y(t))\|\\&\underset{(\star\star)}{\leq}2L\cdot\|x(t)-y(t)\|^2\end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ זה אי־שיוויון קושי־שוורץ ו־$(\star\star)$ זה מהליפשיציות.
אז הפונקציה $f(t)=e^{-2Lt}\|x(t)-y(t)\|^2$ היא מונוטונית יורדת כי מגזירה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = -2Lf(t) + 2Lf(t) = 0$$

הנגזרת לא חיובית ולכן היא מונוטונית יורדת ובנוסף $f(t)$ אי־שלילית ב־$[\tau, \tau + +\delta]$ אבל $f(\tau) = 0$ ולכן $f(t) = 0$ לכל $t \in [\tau, \tau + \delta]$ ולכן $\|x(t) - y(t)\| = 0$ וזו סתירה להגדרת τ בתור אינפימום.

עבור t־יים שליליים ההוכחה דומה עם sup ופונקציה קצת אחרת או להסתכל על $\tilde{x}(t) = x(-t)$ ומהמשוואה $\eta'(t) = -F(\eta(t))$. □

□

סוף הרצאה 3 – 13/04

1.3 תלות בתנאי ההתחלה

הגדרה 1.9 הפיתרון המקסימלי

נניח ש־$U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית, נגדיר

$$J_p^* := \{t \in \mathbb{R} \mid \text{Exists solution for the problem } (\star) \text{ on a segment that contains } t\}$$

ו־J_p^* היינו קטע (כי אם t נמצא בו ו־0 נמצא בו אז כל נקודה בין 0 ל־t נמצא בו כי זה מכיל את הקטע).
הפיתרון שמוגדר על J_p^* הוא יחיד (מהלמה שהוכחנו) ופיתרון זה נקרא **הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה**.

משפט 1.10 טריכוטומיה של זרימות של שדה ליפשיץ מקומי

תהיי $U \in \mathbb{R}^n$ פתוחה, תהיי $p \in U$ ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית.
נסמן $X : J_p^* \to U$ הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = p \end{cases}$$

אזי עבור $T \in \partial J_p^* \setminus \{\pm\infty\}$ מתקיים אחד משני המקרים הבאים

1. $\liminf_{t \to T} \operatorname{dist}(x(t), \partial U) = 0$
2. $\limsup_{t \to T} \|x(t)\| = \infty$

הוכחה: נניח ש־$\sup J_p^* = T < \infty, \quad \liminf_{t \to T} \operatorname{dist}(x(t), \partial U) > 0$ וש־$\limsup_{t \to T} \|x(t)\| < \infty$.
כלומר, הקבוצה (התמונה של המסילה) $x([0, T))$ חסומה ומוכלת בקבוצה הסגורה

$$A_{\varepsilon_0} := \left\{x \mid \operatorname{dist}\left(x, \partial U \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\right\}$$

לאיזשהו $\varepsilon_0 > 0$.
ניקח סדרה $0 < t_k < T$ כך ש־$t_k \xrightarrow[k \to \infty]{} T$ ונבחין ש־x_{t_k} כולם שייכים לקבוצה A_{ε_0} וגם לקבוצה החסומה $x([0, T))$.
נפעיל את (ההוכחה של) משפט פיאנו עם x_{t_k} כנקודת התחלה עם אותו $\delta > 0$ לכולם שכן δ תלוי ברדיוס בכדור שניתן לקחת סביב x_{t_k} ובחסם על $\|F\mid_B\|$ אבל את הרדיוס והחסם על הנורמה ניתן לבחור באופן אחיד (כי F רציפה ולכן חסומה וזה חוסם את כל הנקודות).
יהי K כך ש־$T < t_K + \delta$ ונקבל סתירה לכך ש־$T = \sup J_p^*$ כי ממשפט פיאנו הפיתרון מוגדר מעבר ל־T.
משיקולי סימטריה ההוכחה למקרה השני זהה. □

טענה 1.11

תהיי $U \in \mathbb{R}^n$ פתוחה, תהיי $p \in U$ ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית.
נניח שאנחנו יודעים שקיימת קבוצה קומפקטית $K \subseteq U$ ו־$T > 0$ ($T < 0$ עובד באופן דומה) כך שלכל $0 < t < T$ מתקיים

1. אם $t \in J_p^*$ אז $x_p(t) \in K$
2. $[0, T) \subseteq J_p^*$

הוכחה: אם $\sup J_p^* > 0$ אז נסמן $T > \tau = \sup J_p^*$ ונקבל ש־$x([0, \tau)) \subseteq K$ אבל אז לא קרה אף אחד מהדברים (לא התפוצצנו ולא נגענו בשפה) בסתירה לכך ש־$\tau < T \neq \infty$. □

הגדרה 1.12

נגדיר

$$\Omega := \left\{(p, t) \mid p \in U, t \in J_p^*\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

לכל $(p, t) \in \Omega$ נגדיר את $\Phi(p, t) = x_p(t) = \varphi_t(p)$ היכן ש־$x_p(t)$ פיתרון ל־$x_p'(t) = F\big(x_p(t)\big)$ ו־$x_p(0) = p$.

משפט 1.13

הקבוצה Ω היא קבוצה פתוחה וההעתקה $\Phi : \Omega \to U$ היא רציפה (F כמובן ליפשיץ מקומית).

הוכחה: תהיי $(p, t_0) \in \Omega$, נרצה להראות ש־Ω מכילה סביבה של (p, t_0) וש־Φ רציפה שם.
ניקח $t_0 \geq 0$ (לשלילי אותו הדבר אבל אנחנו אנשים חיוביים) ותהיי

$$C := \{\Phi(p, t) \mid 0 \leq t \leq t_0\} \subseteq U$$

זאת קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקטית יש לה מרחק חיובי מהשפה (כלומר, קיים $r > 0$ כך ש־$0 < 4r < \operatorname{dist}(C, \partial U)$).
נסמן

$$M := \sup\{\|F(x)\| \mid \operatorname{dist}(x, C) \leq 4r\}$$
$$L := \operatorname{Lip} F|_{\operatorname{dist}(x,C) \leq 4r}$$

למה 1.14

תהיי $q \in U$ כך ש־$\|q - p\| \leq re^{-Lt_0}$ אזי לכל $0 \leq t \leq t_0$ כך ש־$(q, t) \in \Omega$ מתקיים

$$\|\Phi(p, t) - \Phi(q, t)\| \leq 2e^{Lt}\|p - q\| \leq 2r$$

הוכחה: נסמן $x_p(t), x_q(t)$ להיות הפתרונות המתאימים.
נניח שקיים $0 \leq t \leq t_0$ כך ש־$(q, t) \in \Omega$ אבל $\|x_p(t) - x_q(t)\| \geq 2e^{Lt}\|p - q\|$.
ברור כי $q \neq p$ ונסמן

$$\tau := \inf\{t \in [0, t_0] \mid (q, t) \in \Omega,\ \|x_p(t) - x_q(t)\| \geq 2e^{Lt}\|p - q\|\}$$

אז $0 < \tau \leq t_0$ (מהרציפות), $(q, \tau) \in \Omega$ וכן $\|x_p(\tau) - x_q(\tau)\| = 2e^{L\tau}\|p - q\|$.
יתרה מזאת, לכל $t \in [0, \tau]$

$$\|x_p(t) - x_q(t)\| \leq 2e^{Lt}\|p - q\| \leq 2r$$

לכן $x_p(t), x_q(t)$ לכל $t \in [0, \tau]$ מוכל בקבוצה

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, C) \leq 2r\}$$

ולכן F ליפשיץ שם עם קבוע L ובפרט לכל $t \in [0, \tau]$

$$\|F(x_p(t)) - F(x_q(t))\| \leq L\|x_p(t) - x_q(t)\|$$

ומכאן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x_p(t) - x_q(t)\|^2 \leq 2L\|x_p(t) - x_q(t)\|^2$$

ולכן הפונקציה $t \mapsto e^{-2Lt}\|x_p(t) - x_q(t)\|^2$ מונוטונית יורדת בקטע $[0, \tau]$ ומכאן נקבל

$$2\|p - q\| \leq e^{-L\tau}\|x_p(\tau) - x_q(\tau)\| \leq \|p - q\|$$

וזאת סתירה. □

סוף הרצאה 4 – 20/04

□

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO כל מה שעובר פה הוא קצת חוזר על מה שהיה בהרצאה הקודמת אז תסדרי את זה...
תזכורת: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית כך שעבור $p \in U$

$$\begin{cases} x_p'(t) = F(x_p(t)) \\ x_p(0) = p \end{cases}$$

הגדרנו

$$\Omega = \{(p, t) \mid t \in J_p^*,\ p \in U\}$$

כאשר הגדרנו את J_p^* תחום ההגדרה של הפיתרון המקסימלי ל־F.
והגדרנו $\Phi : \Omega \to U$ על־ידי $\Phi(p, t) = x_p(t) = \varphi_t p$ וראינו משפט שאומר ש־Ω קבוצה פתוחה ו־Φ העתקה רציפה.
כלומר, לכל (p, t_0) יש סביבה קטנה שמוכלת ב־Ω ולכל (q, t) בסביבה הזו מתקיים ש־$\Phi(q, t)$ קרוב ל־$\varphi(p, t_0)$.

הוכחה: יהי $t_0 \geq 0$, נגדיר $C = \{\Phi(p,t) \mid 0 \leq t \leq t_0\}$ וקיים $r > 0$ כך ש־$\operatorname{dist}(C, \partial U) > 4r$ ולכן נגדיר קבוצה קומפקטית $\tilde{C} = \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, C) \leq 4r\}$ וניקח

$$M = \sup\left\{\|F(x)\| \mid x \in \tilde{C}\right\}$$

ו־L הקבוע ליפשיץ של F על $\tilde{C}$. □

למה 1.15 תזכורת

תהיי $q \in U$ כך ש־$\|q-p\| \leq re^{-Lt_0}$ אזי לכל $0 \leq t \leq t_0$ כך ש־$(q,t) \in \Omega$ מתקיים

$$\|\Phi(p,t) - \Phi(q,t)\| \leq 2e^{Lt}\|p-q\| \leq 2r$$

למה 1.16

תהיי q כזו ש־$\|p-q\| \leq re^{-Lt_0}$, אם $(q,t) \in \Omega$ ו־$0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}$ אזי $\Phi(q,t) \in \tilde{C}$.

הוכחה: בשלילה נניח שיש $0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}$ כך ש־$(q,t) \in \Omega$ אבל $\operatorname{dist}(\Phi(q,t), C) > 4r$ ומהלמה הקודמת ל־$0 \leq t \leq t_0$ מתקיים $\operatorname{dist}(\Phi(q,t), C) \leq 2r$ ולכן עבור t כזה מהנחת השלילה בהכרח מתקיים $t_0 < r$ ובפרט $(q,t_0) \in \Omega$.
נסמן $\tau = \inf\{t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M} \mid (q,t) \in \Omega,\ \ \operatorname{dist}(q,C) > 4r\}$.
אבל $t_0 \leq \tau \leq t_0 + \frac{r}{M}$ ו־$\operatorname{dist}(\Phi(q,\tau), C) = 4r$ ויתר על־כן לכל $t_0 \leq t \leq \tau$ מתקיים $\operatorname{dist}((q,t), C) \leq 4r$ ובפרט לכל $0 \leq t \leq \tau$ מתקיים $\|F(\Phi((q,t)))\|$ M ונשים לב

$$\operatorname{dist}(\Phi(q,\tau), C) \leq \|\Phi(q,\tau) - \Phi(q,t_0)\| + \operatorname{dist}(\Phi(q,t_0), C) \leq M \cdot (\tau - t_0) + 2r \leq M \cdot \frac{r}{M} + 2r = 3r$$

וזאת כמובן סתירה.

הערה

$(q,t) \in \Omega \iff t \in J_q^*$

□

למה 1.17

נניח ש־$\|p-q\| \leq re^{-Lt_0}$ ו־$0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}$ אזי $(q,t) \in \Omega$ ומתקיים

$$\|\Phi(q,t_0) - \Phi(q,t)\| \leq 2e^{Lt_0}\|p-q\| + M\|t_0 - t\|$$

הלמה הזאת מסיימת את ההוכחה עבור $t_0 \geq 0$.
ראשית ברור מכאן ש־Ω פתוחה וכן ש־Φ רציפה עבור $t_0 > 0$ ובמקרה $t_0 = 0$ מקבלים סביבה ימנית ב־t והרציפות היא רציפות מימין ב־t.
ומהוכחה דומה עבור $t_0 \leq 0$ נקבל רציפות משמאל וזה מסיים את ההוכחה.

הוכחה: הראינו שבתנאים הנתונים לכל t שעבורו $(q,t) \in \Omega$ מתקיים $\operatorname{dist}(\Phi(q,t), C) \leq 4r$ ולכן לכל $0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}$ כזה, $(q,t) \in \Omega$ כי אחרת היה $0 \leq t_0 \leq t_0 + \frac{r}{M}$ שעבורו הפתרון מגיע לשפה של U או מתפוצץ אבל זה לא ייתכן.
כעת, כדי לקבל את האי־שיוויון נכתוב

$$\|\Phi(p,t_0) - \Phi(q,t)\| \leq \|\Phi(p,t_0) - \Phi(q,t_0)\| + \|\Phi(q,t_0) - \Phi(q,t)\| \leq \underbrace{2e^{Lt_0}\|p-q\|}_{\text{Lemma 1}} + \underbrace{M|t-t_0|}_{\Phi(q,t) \in \tilde{C}}$$

□

נשים לב

$$x_p'(t) = \frac{\partial \Phi(,p,t)}{\partial t} = F \circ \Phi(p,t) = F\big(x_p(t)\big)$$

מה לגבי הגזירה של Φ לפי מיקום?
אם Φ גזירה לפי המיקום (נסמן את הנגזרת ב־$D\Phi$), בזמן 0 היא הזהות על כל U ולכן Φ אכן גזירה ומתקיים $D\Phi(p,0) = \mathrm{Id}$ ולכן

$$\frac{\partial}{\partial t} D\Phi = D\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) = D(F \circ \Phi) = DF(\Phi(p,t))D\Phi(p,t)$$

אז אם F לא גזירה אין על מה לדבר!

משפט 1.18

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$p \in U$ עם $F : U \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות ובפרט ליפשיץ מקומית.
יהי x_p הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה $\begin{cases} x'(t)=F(x(t)) \\ x(0)=p \end{cases}$ ויהי $M(t)$ הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה $\begin{cases} M'(t)=DF(x(t))M(t) \\ M(0)=\mathrm{Id} \end{cases}$.
אזי לכל $T \in I_p^*$, φ_T גזירה ב־p והדיפרנציאל שלה נתון על־ידי $D\varphi_T(p) = M(t)$.

הערה

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח שמכיל את 0 ותהיי $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ פונקציה רציפה (למרחב המטריצות) אזי לבעיית ההתחלה $\begin{cases} M'(t)=A(t)M(t) \\ M(0)=\mathrm{Id} \end{cases}$ קיים פיתרון על כל הקטע I (ראינו/נראה את זה בתרגיל עד־כדי המעבר מוקטור למטריצה שאת זה עושים בקלות כי המטריצה היא אוסף של n וקטורי עמודות).

הוכחה: צריך להראות שאם אנחנו מסתכלים על

$$\varphi_T(q) = \varphi_T(p) + M(t)(q-p) + o(\|q-p\|)$$

נסמן $x_q(t) = \varphi_t(q), x_p(t) = \varphi_t(p)$ ונסמן $u(t) = x_q(t) - x_p(t) - M_t(q-p)$.
יהי $\varepsilon > 0$, צריך להראות שקיים $\delta > 0$ כך שלכל q עם $0 < \|q-p\| < \delta$ מתקיים $\|u(t)\| < \varepsilon\|q-p\|$.
נגדיר

$$K := \sup_{t\in[0,T]} \|M(t)\|_{op} \qquad L := \sup_{t\in[0,T]} \left\|DF\big(x_p(t)\big)\right\|_{op}$$

ונבחר $\eta > 0$ כך ש־$\eta \cdot K \cdot t \cdot e^{(L+\eta)T} < \varepsilon$.
DF רציפה ולכן יש $r > 0$ כך שלכל $0 \le t \le T$ ולכל $z \in B_r\big(x_p(t)\big)$ מתקיים $\left\|DF(z) - DF\big(x_p(t)\big)\right\|_{op} < \eta$ ולכן עבור z כאלה

$$\left\|F(z) - F\big(x_p(t)\big) - DF\big(x_p(t)\big)\big(z - x_p(t)\big)\right\| < \eta\|z - x_p(t)\|$$

הסבר: עד היום תמיד הסכמנו שאם $\|DG\|_{op} < M$ אז $\|G(z) - G(w)\| \le M\|z-w\|$ על המסלול בין z ל־w (טריק אינטגרציה).
אז עבור t, p נתונים נגדיר $G(z) = F(z) - DF\big(x_p(t)\big)z$ ומכללי גזירה

$$DG(z) = DF(z) - DF\big(x_p(t)\big)$$

ולכן

$$\|DG(z)\| = \left\|DF(z) - DF\big(x_p(t)\big)\right\| < \eta$$

ולכן

$$\left\|G(z) - G\big(x_p(t)\big)\right\| < \eta\|z - x_p(t)\|$$

אז אם נציב

$$\left\|F(z) - DF\big(x_p(t)\big)z - F\big(x_p(t)\big) + DF\big(x_p(t)\big)x_p(t)\right\| = \left\|F(z) - F\big(x_p(t)\big) - DF\big(x_p(t)\big)\big(z - x_p(t)\big)\right\|$$

מרציפות בתנאי ההתחלה קיים $\delta > 0$ כך שלכל q עם $\|p-q\| < \delta$ ולכל $0 \le t \le T$ מתקיים $\left\|x_p(t) - x_q(t)\right\| < r$ ולכן מצאנו δ.

□

סוף הרצאה 5 – 27/04

משפט 1.19

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $p \in U$ ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות.
אז לכל $T \in J_p^*$, $\varphi_T(\cdot)$ גזירה ב־p והדיפרנציאל שלה מקיים $D\varphi_T(p) = M(t)$ היכן ש־M מקיימת

$$M'(t) = DF\big(x_p(t)\big)M(t),\ \ M(0) = \mathrm{Id}$$

הוכחה: נניח ש־$T > 0$ (כי אם $T = 0$ אז זו הזהות ולכן גזירה ועבור $T < 0$ זה תהליך דומה) ולכל $q \in U$ נגדיר

$$u(t) = x_q(t) - x_p(t) - M(t)(q-p)$$

צריך להוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\|q-p\| < \delta$ אז $\|u(T)\| \le \varepsilon\|q-p\|$.
יהי $\varepsilon > 0$ ונסמן $L = \sup_{t\in[0,T]}\left\|DF\big(x_p(t)\big)\right\|,\ K = \sup_{t\in[0,T]}\|M(t)\|$ וקיימת $\eta > 0$ כך שמתקיים $\eta KTe^{T(L+\eta)} < \varepsilon$.
קיים $r > 0$ כך שלכל $t \in [0,T]$ ולכל z כך ש־$\left\|z - x_p(t)\right\| < r$ מתקיים

$$\left\|F(z) - F\big(x_p(t)\big) - DF\big(x_p(t)\big)\big(z - x_p(t)\big)\right\| < \eta\|z - x_p(t)\|$$

מרציפות הזרימה בתנאי ההתחלה (מה שאמרנו ש־$\Phi(p,t)=x_p(t)$ רציפה במשפט הקודם) קיים $\delta>0$ כך שאם $\|q-p\|<\delta$ אז $\|x_q(t)-x_p(t)\|<r$ לכל $t\in[0,T]$.

צריך להעריך את $u(T)$: אם $\|u(T)\|=0$ סיימנו, אחרת נסמן $\tau=\sup\{0\le t\le T \mid u(t)=0\}$ וכמובן $u(\tau)=0$ והוא הזמן האחרון שבו u מקבלת את הערך אפס ו־$0\le\tau<T$ והיא כמובן לא קבוצה ריקה אז על הקטע $(\tau,T]$, הפונקציה $\|u(t)\|=\sqrt{\langle u(t),u(t)\rangle}$ מקיימת

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|=\frac{\langle u(t),u'(t)\rangle}{\|u(t)\|}\underset{\text{אי־שיוויון קושי־שוורץ}}{\le}\|u'(t)\|$$

נחשב

$$\begin{aligned}u'(t)&=x_q'(t)-x_p'(t)-M'(t)(q-p)=F\big(x_q(t)\big)-F\big(x_p(t)\big)-DF\big(x_p(t)\big)M(t)(q-p)\\&=F\big(x_q(t)\big)-F\big(x_p(t)\big)-DF\big(x_p(t)\big)\big(x_q(t)-x_p(t)\big)+DF\big(x_p(t)\big)u(t)\end{aligned}$$

נשים לב שממה שמצאנו לעיל והבחירה שלנו של q

$$\big\|F\big(x_q(t)\big)-F\big(x_p(t)\big)-DF\big(x_p(t)\big)\big(x_q(t)-x_p(t)\big)\big\|<\eta\|x_q(t)-x_p(t)\|$$

אז

$$\begin{aligned}\|u'(t)\|&\le\eta\|x_q(t)-x_p(t)\|+L\|u(t)\|=\eta\|u(t)+M(t)(q-p)\|+L\|u(t)\|\\&\underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\le}(\eta+L)\|u(t)\|+\eta\|M(t)\|(q-p)\le\eta K\|q-p\|+(L+\eta)\|u(t)\|\end{aligned}$$

בפרט

$$(\star)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|\le\eta K\|q-p\|+(L+\eta)\|u(t)\|$$

מאותו טריק של מרוכבות על נגזרת של אקספוננט

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{-t(L+\eta)}\|u(t)\|\big)=e^{-t(L+\eta)}\left(-(L+\eta)\|u(t)\|+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|\right)\underset{(\star)}{\le}\eta K\underbrace{e^{-t(L+\eta)}}_{\le1})\|q-p\|\le\eta K\|q-p\|$$

אבל האחרון זה נגזרת של פונקציה לינארית $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta K\|q-p\|t)$.

ולכן הפונקציה $e^{-t(L+\eta)}\|u(t)\|-\eta Kt\|q-p\|$ היא מונוטונית יורדת באינטרוול $(\tau,T]$ כי הנגזרת קטנה מאפס (מהצבה) ונקבל

$$e^{-T(L+\eta)}\|u(T)\|-\eta KT\|q-p\|\le e^{-\tau(L+\eta)}\underbrace{\|u(\tau)\|}_{=0}-\eta K\tau\|q-p\|=-\eta K\tau\|q-p\|\le0$$

ובסך־הכל

$$\|u(T)\|\le e^{T(L+\eta)}\eta KT\|q-p\|<\varepsilon\|q-p\|$$

□

סוף הרצאה 6 – 28/04

1.4 משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים

את המשפט הבא ראינו בתרגיל הבית

משפט 1.20

יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע שמכיל את 0, $A:I\to\mathbb{R}^{n\times n},g:I\to\mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות.
אזי לכל $x_0\in\mathbb{R}^n$ קיים פתרון יחיד אשר מוגדר על כל I לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases}(\star)\ x'(t)=A(t)x(t)+g(t)\\x(0)=x_0\end{cases}$$

הגדרה 1.21

בתנאי המשפט לעיל, אם $g(t)=0$ לכל t המשוואה $(\star)$ נקראת הומוגנית והיא תקרא אוטונומית אם A ו־g אינן תלויות ב־t (אם A,g קבועות אז $(\star)$ אוטונומית).

ניתן שתי הוכחות למשפט – הראשונה בהשראת הסיכום מהמודל, השנייה בהתאם למטלות עם הלמה של גרונוול.
הוכחה: מספיק להוכיח את המשפט לכל קטע סגור וחסום $I_0\subseteq I$.
נסמן

$$
\begin{aligned}
F(x,t) &\coloneqq A(t)x + g(t) \\
L &\coloneqq \sup_{t\in I_0} \|A(t)\|_{op} \\
M &\coloneqq \sup_{t\in I_0} \|g(t)\|
\end{aligned}
$$

מתקיים ש־$L < \infty$ שכן A רציפה ו־I_0 קומפקטי ולכן F רציפה ב־$\mathbb{R}^n \times I_0$ ומקיימת את תנאי ליפשיץ

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| = \|A(t)\cdot(x-y)\| \le L\|x-y\|$$

ממשפט פיקארד מספיק להניח רציפות של F במשתנה הזמן וליפשציות מקומית של F במשתנה המיקום עם קבועי ליפשיץ שלא תלויים בזמן ולכן קיים פתרון יחיד לפרק זמן סופי כלשהו.
מאי־שיוויון קושי־שוורץ נקבל

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t)\|^2 &= 2\langle x'(t), x(t)\rangle \\
&= 2\langle A(t)x(t) + g(t), x(t)\rangle \\
&\le 2\|A(t)x(t) + g(t)\| \cdot \|x(t)\| \\
&\le 2\|A(t)x(t)\| \cdot \|x(t)\| + 2\|g(t)\| \cdot \|x(t)\| \\
&\le 2L\|x(t)\|^2 + 2M\|x(t)\|
\end{aligned}
$$

אז אפשר לקחת $0 < C$ שתלוי ב־L, M אבל לא תלוי ב־t (כי א חד ריבועי ב־$\|x(t)\|$ והשני לינארי בו) כך שמתקיים

$$2L\|x(t)\|^2 + 2M\|x(t)\| \le 4L\|x(t)\|^2 + C$$

בלי הגבלת הכלליות $0 < t$ ואז

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-4Lt}\|x(t)\|^2\right] \le Ce^{-4Lt} \le C$$

מאינטגרציה על התחום $[0,t]$ נקבל

$$\|x(t)\|^2 e^{-4Lt} - \|x_0\|^2 \le Ct \Longrightarrow \|x(t)\|^2 \le Cte^{4Lt} + \|x_0\|^2 e^{4Lt}$$

החסם הזה מעיד שהפתרון לא יכול להתפוצץ בזמן סופי (C, M, L תלויים בבחירת I_0 אבל הם קבועים שלא יכולים להתפוצץ בזמן סופי) ומטריכוטומיה הפתרון מוגדר היטב על כל I. □

הוכחה: מספיק להוכיח את המשפט לכל קטע סגור וחסום $I_0 \subseteq I$ המכיל את 0.
נסמן:

$$
\begin{aligned}
F(x,t) &\coloneqq A(t)x + g(t) \\
L &\coloneqq \sup_{t\in I_0} \|A(t)\|_{op} \\
M &\coloneqq \sup_{t\in I_0} \|g(t)\|
\end{aligned}
$$

מתקיים $L < \infty$ שכן A רציפה ו־I_0 קומפקטי. לכן F רציפה ב־$\mathbb{R}^n \times I_0$ ומקיימת את תנאי ליפשיץ (ביחס למשתנה המיקום):

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| = \|A(t)\cdot(x-y)\| \le L\|x-y\|$$

ממשפט פיקארד קיים פתרון יחיד לפרק זמן סופי כלשהו.
נראה שהפתרון אינו מתפוצץ על ידי מעבר למשוואה האינטגרלית השקולה:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (A(s)x(s) + g(s))\,\mathrm{d}s$$

נניח ללא הגבלת הכלליות כי $t > 0$. מאי־שוויון המשולש לאינטגרלים ותכונות הנורמה נקבל:

$$
\begin{aligned}
\|x(t)\| &\le \|x_0\| + \int_0^t \|A(s)x(s) + g(s)\| \,\mathrm{d}s \\
&\le \|x_0\| + \int_0^t \left(\|A(s)\|_{op}\|x(s)\| + \|g(s)\|\right) \mathrm{d}s \\
&\le \|x_0\| + \int_0^t (L\|x(s)\| + M) \,\mathrm{d}s \\
&= (\|x_0\| + Mt) + \int_0^t L\|x(s)\| \,\mathrm{d}s \\
&= (\|x_0\| + Mt)e^{Lt}
\end{aligned}
$$

כאשר המעבר האחרון הוא מהלמה של גרונוול אז אם־כך החסם שקיבלנו מעיד שהנורמה של הפתרון חסומה לכל זמן $t \in I_0$.
ממשפט הטריכוטומיה מכיוון שהפתרון חסום על כל קטע סגור I_0, הוא אינו מתפוצץ בזמן סופי ולכן מוגדר היטב על כל I. □

משפט 1.22

מרחב הפתרונות המקסימלי למשוואה $(\star)$ עם $g(t) = 0$ לכל t (ללא תנאי התחלה) הוא מרחב לינארי ממימד n.

הערה

קבוצת הפתרונות ל־$(\star)$ כאשר $g = 0$ סגורה לחיבור וכפל בסקלר שכן אם x, y פתרונות ו־$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ נסתכל על

$$(\alpha x + \beta y)' = \alpha x' + \beta y' = \alpha A(t)x(t) + \beta A(t)y(t) = A(t)(\alpha x + \beta y)$$

שכן x, y פתרונות וזאת הוכחה עבור מימד 2 ושאר ההוכחה באינדוקציה על n ולכן $\alpha x + \beta y$ פתרון.

הוכחה: נסמן ב־e_k את הוקטור הסטנדרטי ונסמן ב־x_k את הפתרון ל־$(\star)$ עם תנאי ההתחלה $x(0) = \mathrm{e}_k$.
$\{\mathrm{e}\}_{k\in\mathbb{N}}$ בלתי־תלויים כי אם $\sum \alpha_j x_j(t) = 0$ לאיזשהו t נוכיח ש־$\alpha_j = 0$ לכל c_j ואז מיחידות הפונקציה הקבועה 0 היא הפתרון היחידי ולכן $\sum \alpha_j x_j(0) = 0$ שכן הסכום שלהם הוא אפס וכל פונקציה היא פונקציית האפס ולכן $\alpha_j = 0$ לכל j והאיברים בלתי־תלויים.
נראה שהיא גם קבוצה פורשת: יהי y פתרון ולכן $y' = Ay$ וקיימים $\{B_j\}_{j=1}^n$ כך ש־$y(0) = \sum B_j \mathrm{e}_j$ ומיחידות $y(t) = \sum B_j x_j(t)$ לכל $t \in I$ וקיבלנו שהקבוצה פורשת.
יש איזומורפיזם בין מרחב וקטורי למרחב לינארי ולכן סיימנו. □

נתבונן במשוואה הומוגונית עם מקדמים קבועים, כלומר $x'(t) = A \cdot x(t)$ כאשר A מטריצה קבועה שאינה תלויה ב־t ו־$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ונניח ש־$x(0) = x_0$.
ננסה להפעיל את איטרציות פיקארד

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0 + \int_0^t Ax_0(s)\,\mathrm{d}s = x_0 + A\int_0^t x_0 = x_0 + Atx_0 \\
x_2(t) &= x_0 + \int_0^t x_1(s)\,\mathrm{d}s = x_0 + Atx_0 + \frac{A^2t^2}{2}x_0 \\
&\vdots \\
x_n(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{A^nt^nx_0}{n!} = \left(\mathrm{id} + At + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!}\right)x_0
\end{aligned}
$$

מפיקארד התהליך הזה מתכנס ונסמן את הגבול ב־$\exp(tA) \cdot x_0$ (זה בעצם אקספוננט שמציבים בפנים וקטור).

הגדרה 1.23

לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר את $\exp(A) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!}$ כאשר $A^0 = \mathrm{id}$.

טענה 1.24

הטור לעיל מתכנס.

הוכחה: נראה זאת בנורמת אינסוף שכן בלאו הכי כל הנורמות שקולות ומספיק להוכיח שסדרת הסכומים האלו היא סדרת קושי, ואכן

$$\left\|\sum_{k=0}^t \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^s \frac{A^k}{k!}\right\|_{op} \le \sum_{k=s+1}^t \frac{1}{k!}\|A^k\|_{op} \le \sum_{k=s+1}^t \frac{1}{k!}\|A\|_{op}^k$$

מהיות $e^{\|A\|_{op}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\|A\|_{op}^k < \infty$ זה קטן כרצוננו עבור s, t מספיק גדולים. □

הערה

עבור מספרים $\exp(t+s)=\exp(t)\cdot\exp(s)$ אפשר להראות מהפיתוח לטור בעזרת נוסחת הבינום אבל עבור מטריצות באופן כללי זה לא נכון כי אם המטריצות לא מתחלפות $AB\neq BA$.

טענה 1.25

אם $A,b\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש־$AB=BA$ אזי $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$.

מסקנה 1.26

אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אז $\exp(A)$ מטריצה הפיכה ו־$(\exp(A))^{-1}=\exp(A^{-1})$.

הוכחה: A ו־A^{-1} מתחלפות ולכן

$$\mathrm{id}=\exp(-AA)=\exp(A)\cdot\exp(-A)$$

□

מסקנה 1.27

לכל $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ההעתקה $t\mapsto\exp(tA)$ (זו ההעתקה $\mathbb{R}\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) היא הומומורפיזם של חבורות.

הוכחה: לכל $s,t\in\mathbb{R}$, tA ו־sA מתחלפות ואז $(t+s)\mapsto\exp((t+s)A)$ אבל גם מתקיים

$$\exp((t+s)A)=\exp(tA+sA)=\exp(tA)\cdot\exp(sA)$$

□

עד כה ראינו שעבור

$$\begin{cases}x'=Ax\\x(0)=x_0\end{cases}$$

מתקיים ש־$x(t)=\exp(tA)x_0$ הוא פתרון למשוואה על קטע (אולי קטן) סביב 0 אבל $\exp(tA)x_0$ מוגדר לכל t והפתרון מוגדר לכל $t\in I$ וטבעי לשאול האם הם מתלכדים – התשובה לכך היא כן.

טענה 1.28

יהי y הפתרון המקסימלי למשוואה

$$\begin{cases}x'(t)=Ax(t)\\x(0)=x_0\\x(t)=\exp(tA)x_0\end{cases}$$

אז $y(t)=\exp(tA)x_0$ לכל $t\in I$.

הוכחה: נניח שלא ויש $t>0$ כך ש־$y(t)\neq x(t)$, נסמן

$$\tau=\inf\{t>0\mid x(t)\neq y(t)\}$$

מתקיים $\tau>0$ כי אנו יודעים שבאיזשהי סביבה ימנית שבה הם מסכימים. נראה שיש סביבה של τ שבה x,y מסכימים ונקבל סתירה.
נסמן $z_\star=\exp(\tau A)x_0$ ונתבונן בבעיה

$$(\star\star)\begin{cases}z'(t)=Az(t)\\z(\tau)=z_\star\end{cases}$$

מאיטרציות פיקארד ידוע שיש סביבה $\delta>0$ של τ כך ש־$z(t)=\exp((t-\tau)A)z_\star$ הוא הפיתרון היחיד לבעיה $(\star\star)$.
נשים לב שמתקיים $x(\tau)=y(\tau)$ שכן זה אינפימום היכן שהם לא שווים וכמובן מרציפות ו־$y(\tau)=\exp(\tau A)x_0$ ולכן y,z מתלכדים על סביבה זו של τ.
מצד שני, על הסביבה הזו מתקיים

$$z(t)=\exp((t-\tau)A)z_\star=\exp((t-\tau)A)\exp(\tau A)x_0=\exp(tA-\tau A+\tau A)x_0=\exp(tA)x_0=x(t)$$

מהגדרה וזו כמובן סתירה. □

איך מחשבים את $\exp(tA)$? נשים לב ש־P מטריצה הפיכה ואז $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$ שכן $PP^{-1} = \mathrm{id}$ ואז $(PAP^{-1})^k = A^k$.

שנית, אם A אלכסונית, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ אז $\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$.

שלישית, פעולת האקספוננט מכבדת חלוקה לבלוקים, כלומר

$$\exp\begin{pmatrix} \square & & 0 \\ & \square & \\ & \ddots & \\ 0 & & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\square & & 0 \\ & \exp\square & \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp\square \end{pmatrix}$$

נתבונן ב־exp של בלוקי ז'ורדן

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

טענה 1.29

לכל בלוק ז'ורדן $J_\lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מתקיים

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

הוכחה: באינדוקציה על k רואים שמתקיים

$$(tJ_\lambda)^k = t^k\begin{pmatrix} \binom{k}{0}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n}\lambda^{k-n} \\ & \binom{k}{0}\lambda^k & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{k}{0}\lambda^k \end{pmatrix}$$

כאשר $\binom{k}{j} = 0$ לכל $k < j$ ומכאן מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tJ_\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} \binom{k}{0}\frac{t^k}{k!}\lambda^k & \binom{k}{1}\frac{t^k}{k!}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n}\frac{t^k}{k!}\lambda^{k-n} \\ & \binom{k}{0}\frac{t^k}{k!}\lambda^k & \dots & \binom{k}{n-1}\frac{t^k}{k!}\lambda^{k-n+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{k}{0}\frac{t^k}{k!}\lambda^k \end{pmatrix}$$

התא ה־j בשורה הראשונה של המטריצה המתקבלת הוא

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{j-1}\frac{t^k}{k!}\lambda^{k-j+1} = t^{j-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k-j+1}\lambda^{k-j+1}}{(j-1)!(k-j+1)!} = e^{t\lambda}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$$

על־ידי הצבה של הפיתוח הזה בכל אחד מהתאים במטריצה הנוסחה נובעת. $\square$

סוף הרצאה 7 – 04/05

הערה

נניח ש־$A = PJ_\lambda P^{-1}$ כלומר $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ כאשר $\{v_i\}_{i=1}^n$ הוקטורים העצמיים המוכללים שמתאימים לבלוק ז'ורדן עבור J_λ, כלומר מקיימים $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_i = \lambda v_i + v_{i-1}$ לכל $2 \le i \le m$ אז מהחשבון הקודם נובע לכל i

$$\begin{aligned}
\exp(tA)v_i &= P\exp(tJ_\lambda)P^{-1}v_i \\
&= P\exp(tJ_\lambda)\,\mathrm{e}_i \\
&= e^{\lambda t}P\left(\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}, \frac{t^{i-2}}{(i-2)!}, \dots, \frac{t^{i-i}}{(i-i)!}, 0, \dots, 0\right)^T \\
&= e^{\lambda t}\cdot\left(\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}v_1 + \frac{t^{i-2}}{(i-2)!}v_2 + \dots + \frac{t^{i-i}}{(i-i)!}v_i\right)
\end{aligned}$$

לכל וקטור שהוא צירוף לינארי של הוקטורים $v_1, \dots, v_n$ כשמופעלים על $\exp(tA)$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים העצמיים המוכללים.
קיבלנו אלגוריתם לחישוב של $\exp(tA)(x_0)$ לכל x_0 בתנאי שאנחנו יודעים לז'רדן את A עבור $x_0 = \sum \alpha_i v_i$.
אנחנו מתעניינים ב־A ממשית ובפתרונות ל־$x(t) = A(x)$ עם תנאי התחלה ממשיים ובפרט אנחנו יודעים ש־$x(t) = \exp(t(A))(x) \in \mathbb{R}^n$ לכל x אם $x \in \mathbb{R}^n$.
מהיות A מטריצה ממשית, אם $Av = \lambda v$ ו־$\lambda \notin \mathbb{R}$ אז $\overline{\lambda} \notin \mathbb{R}$ וגם $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ כלומר λ ערך עצמי אם ורק אם $\overline{\lambda}$ הוא ערך עצמי ואז נשים לב ש־$Re\, v = \frac{v+\overline{v}}{2} \in$ $\mathrm{Span}\{v, \overline{v}\}$ ואם נפעיל עליו את $\exp(tA)$ אז ממה שראינו אפשר לתת אותו על־ידי צירוף לינארי של $v, \overline{v}$.
באותו אופן, $Im\, v = \frac{v-\overline{v}}{2} \in \mathrm{Span}\{v, \overline{v}\}$ ויתרה מזאת

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v, \overline{v}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{Im\, v, Re\, v\}$$

ולכן כל וקטור x_0 ניתן להצגה כצירוף לינארי עם מקדמים מרוכבים של הוקטורים העצמיים המוכללים של A ולכן אם נכתוב את $x_0 = \sum \alpha_i v_i$ כאשר $\{v_i\}$ הם הוקטורים העצמיים המוכללים נקבל

$$\exp(tA)v = \sum \alpha_i \exp(tA)v_i$$

דוגמה

נניח של־A יש ערך עצמי מרוכב $\lambda = \mu + i\nu$ (כאשר $\nu \neq 0$) ויהי $v + iw$ וקטור עצמי שמתאים לו. אז מנוסחת אוילר

$$e^{\lambda t}(v + iw) = e^{\mu t}(\cos(\nu t)v - \sin(\nu t)w) + ie^{\mu t}(\sin(\nu t)v + \cos(\nu t)w)$$

כל פתרון ממשי שהוא צירוף לינארי מהצורה $\alpha e^{\lambda t}(v + iw) + \beta e^{\overline{\lambda} t}(v - iw)$, ניתן לכתיבה על־ידי

$$ae^{\mu t}(\cos(\nu t)v - \sin(\nu t)w) + be^{\mu t}(\sin(\nu t)v + \cos(\nu t)w)$$

באופן שקול, בכתיב מטריציוני

$$e^{\mu t}\begin{pmatrix} | & | \\ v & w \\ | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\nu t) & \sin(\nu t) \\ -\sin(\nu t) & \cos(\nu t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

אם $\mu = 0$ אז תנאי ההתחלה הוא בדיוק $x_0 = av + bw$ והנורמה נשארת חסומה.
אם $\mu > 0$, ככל שהזמן מתקדם קדימה נקבל ספירלה מתרחבת, ואם $\mu < 0$ ככל שהזמן מתקדם נקבל ספירלה מתכנסת פנימה. קרי, החלק המרוכב עושה סיבוב והחלק הממשי מחליט אם הפתרון גדל או דועך. נוכיח ש־v, w (החלק הממשי והמדומה של הוקטור העצמי) הם בלתי־תלויים מעל $\mathbb{R}$.
נניח בשלילה שהם תלויים. מאחר שהם וקטורים ממשיים, קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש־$w = tv$, ולכן הוקטור העצמי הוא:

$$v + iw = v + itv = (1 + it)v$$

כלומר הוקטור העצמי הוא כפולה מרוכבת של וקטור ממשי v. מאחר ש־$A(v + iw) = \lambda(v + iw)$ נקבל:

$$A((1 + it)v) = \lambda(1 + it)v \Longrightarrow (1 + it)Av = \lambda(1 + it)v \Longrightarrow Av = \lambda v$$

אבל A מטריצה ממשית וגם v וקטור ממשי, ולכן Av חייב להיות ממשי. זה עומד בסתירה לכך ש־λ אינו ממשי (שכן $\nu \neq 0$) ו־$v \neq 0$.

סוף הרצאה 8 – 05/05

נניח שאנחנו יודעים לפתור את המשוואה

$$(\star)\ x'(t) = A(t)x(t)$$

ויש לנו את המשוואה הלא הומגנית

$$(\star\star)\ x'^{(t)} = A(t)x(t) + g(t)$$

כאשר $A(t)$ היא $n \times n$.
יהיו $\{x_1(t), x_2(t), ..., \ x_n(t)\}$ בסיס למרחב הפתרונות של $(\star)$.
הרעיון הוא לכתוב פיתרון כללי למשוואה לא הומוגנית $(\star\star)$ וצריך להראות שלכל $x_i(t)$ עם מתקדמים שמשתנים בזמן. כלומר, נכתוב את y פיתרון ל־$(\star\star)$ כ־$y(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)x_j(t)$.
נסמן ב־$\pi(t)$ את המטריצה שעמודותיה הן $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ והיא נקראת לרוב **המטריצה היסודית / מטריצת פתרונות יסודית**.
נשים לב ש־$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)x_j(t) = \pi(t)\alpha(t)$ כאשר $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$.
אם $y(t) = \pi(t)\alpha(t)$ פותר את $(\star\star)$ אז $y(0) = \pi(0)\alpha(0)$ אז $y(t)$ מקיים

$$y'(t) = A(t)y(t) + g(t)$$

אבל גם

$$y'(t) = (\pi(t)\alpha(t))' = \pi'(t)\alpha(t) + \pi(t)\alpha'(t)$$

אבל $\pi'(t)$ מקיימת את המשוואה ההומוגנית ולכן

$$y'(t) = A(t)\pi(t)\alpha(t) + \pi(t)\alpha'(t)$$

כלומר

$$\cancel{A(t)y(t)} + g(t) = y'(t) = A(t)\underbrace{\pi(t)\alpha(t)}_{=y(t)} + \pi(t)\alpha'(t) = \cancel{A(t)y(t)} + \pi(t)\alpha'(t)$$

לכן קיבלנו שתנאי הכרחי על α היינו

$$\pi(t)\alpha'(t) = g(t) \Longrightarrow \alpha'(t)\pi(t)^{-1}g(t)$$

ו־π הפיכה כי היא בסיס למרחב הפתרונות (זוהי מטריצה רגולרית).
אם כך, מהמשפט היסודי

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s$$

זה תנאי הכרחי, צריך לראות אם זה אכן פיתרון.

משפט 1.30

יהיו $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ רציפה ו־$g : I \to \mathbb{R}^n$ רציפה כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע.
נסמן ב־$\pi(t)$ את מטריצת הפתרונות היסודית למשוואה $x'(t) = A(t)x(t)$.
אזי פונקציה $y(t) = \pi(t)\left(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\right)$ פותרת את המשוואה $y'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = \pi(0)\alpha(0)$.

הוכחה: נגזור

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left[\pi(t)\left(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\right)\right]' \\ &= \pi'(t)\left(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\right) + \pi(t)\pi(t)^{-1}g(t) \\ &= A(t)\pi(t)\left(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\right) + g(t) \\ &= A(t)y(t) + g(t) \end{aligned}$$

□

אם A פונקציה קבועה כלומר $A(t) = A$ ו־$x_i(0) = \mathrm{e}_i$ (הבסיס הסטנדרטי ב־0) אז $\pi(t) = e^{At}$ ונקבל

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)\,\mathrm{d}s$$

זה נקרא **עיקרון דוהמל**.

1.5 התנהגות לוקלית, התנהגות גלובלית ויציבות

לאורך פרק זה יש לנו $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות והסימון הרגיל של $\Phi(p,t) = \varphi_t(p) = x_p(t)$ היא הנקודה בה נמצא הפיתרון של $x' = F(x)$ עם תנאי התחלה p לאחר זמן t.

משפט 1.31

תהיי $p \in U$ ונניח ש־$F(p) \neq 0$.
אזי קיימות קבוצות פתוחות $p \in U_0 \subseteq U_1 \subseteq U$, V פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ כך ש־$0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ והעתקה חד־חד ערכית ועל, גזירה ברציפות ושגם ההופכית שלה היא גזירה ברציפות $\alpha : U_1 \to V$ ו־$\delta > 0$ כך ש־$\alpha(p) = 0$ ולכל $x \in U_0$ ו־$t \in (-\delta, \delta)$ מתקיים $\varphi_t(x) \in U_1$ ו־$\alpha(\varphi_t(x)) = \alpha(x) + (t, 0, ..., 0)$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$p = 0$ ונתבונן בנגזרות החלקיות של $\Phi(t, x)$ בנקודה $p = 0, t = 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} |_{(0,0)} = F(0) \neq 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} |_{(0,0)} = \mathrm{e}_i$$

היות ש־$F(0) \neq 0$ ניתן לבחור $n-1$ איברים מאיברי $(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n)$ ונסמנם $\mathrm{e}_{i_1}, ..., \mathrm{e}_{i_{n-1}}$ כך ש־$\left(F(0), \mathrm{e}_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}\right)$ זה בסיס.
נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$(F(0), \mathrm{e}_i, ..., \mathrm{e}_{n-1})$ זה בסיס.
נגדיר העתקה $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ סביבת 0 ב־$\beta(t, x_1, ..., x_{n-1}) = \varphi_t(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$ על־ידי.
ממשפט הפונקציה ההפוכה יש סביבה $p \in U_1$ וסביבה $0 \in V$ כך ש־$\beta : V \to U_1$ היא דיפאומורפיזם גזיר ברציפות ונגדיר $\alpha = \beta^{-1}$.
קיימת סביבה פתוחה $p \in U_0 \subseteq U_1$ ו־$\delta > 0$ כך שלכל $x \in U_0$ ו־$t \in (-\delta, \delta)$ מתקיים $\varphi_t(x) \in U_1$.
נשאר לבדוק: יהי $x \in U_0$ אז יש $s, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ כך ש־$x = \beta(s, y_1, ..., y_{n-1})$ כלומר $x = \varphi_s(y_1, ..., y_{n-1}, 0)$ ואז עבור $|t| < \delta$ מתקיים $\varphi_t(x) \in U_1$ ולכן

$$\begin{aligned}
\alpha(\varphi_t(x)) &= \alpha(\varphi_t(\varphi_s(y_1, ..., y_{n-1}, 0))) \\
&= \alpha(\varphi_{t+s}(y_1, ..., y_{n-1}, 0)) \\
&= \alpha(\beta(t+s, y_1, ..., y_{n-1})) \\
&= (s, y_1, ..., y_{n-1}) + (t, 0, ..., 0) \\
&= \alpha(x) + (t, 0, ..., 0)
\end{aligned}$$

□

הגדרה 1.32 נקודת שיווי משקל

הנקודה $p \in U$ נקראת **נקודת שיווי משקל** (לפעמיים נקודת שבת) אם $F(p) = 0$.

הגדרה 1.33 נקודת שיווי משקל יציבה

נקודת שיווי משקל p תקרא **נקודת שיווי משקל יציבה** אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $q \in B_\delta(p)$ ולכל $t > 0$ מתקיים $\varphi_t(q) \in B_\varepsilon(p)$.

הגדרה 1.34 נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית

נקודת שיווי משקל p תקרא **נקודת שיווי משקל אסימפטוטית** אם p יציבה וקיימת גם $\eta > 0$ כך שלכל $q \in B_\eta(p)$ מתקיים $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(q) = p$.

משפט 1.35 הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית

תהיי $p \in U$ נקודת שיווי משקל של F ונניח שלכל ערך עצמי של $DF(p)$ יש חלק ממשי שלילי. אזי p יציבה אסימפטוטית.

למה 1.36

תהיי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה עם קבוצת ערכים עצמיים $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ונניח ש־$\max_{\lambda\in\Lambda} Re(\lambda) < 0$.
אזי לכל $0 < \alpha < \min_{\lambda\in\Lambda}|Re(\lambda)|$ יש $C > 0$ כך שלכל $t \geq 0$ מתקיים

$$\|\exp(tA)\|_{op} \leq Ce^{-t\alpha}$$

בפרט

$$\lim_{t\to\infty} \exp(tA) = 0$$

הוכחה: נניח ש־$J = PAP^{-1}$ צורת ז'ורדן של A.
נשים לב ש־$J + \alpha I$ היא מטריצה בצורדת ז'ורדן שכל שלכל ערכייה העצמיים חלק ממשי שלילי.
לכן עבור $t \geq 0$ הערכים של $\exp(t(J + \alpha I))$ הם פולינומים ב־t כפול אקספוננט עם מעריך שלילי ב־t ולכן קיים $C' > 0$ כך שמתקיים

$$\sup_{t\geq 0} \|\exp(t(J + \alpha I))\|_{op} \leq C'$$

לכן

$$\begin{aligned}\|\exp(tA)\|_{op} &= \left\|P\exp(tJ)P^{-1}\right\|_{op}\\ &\le \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(tJ)\|_{op}\\ &= \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(tJ+t\alpha I-t\alpha I)\|_{op}\\ &= \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(t(J+\alpha I))\|_{op}\cdot e^{-t\alpha}\le C\cdot e^{-t\alpha}\end{aligned}$$

□

סוף הרצאה 9 – 11/05

הוכחה של משפט 1.35, הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית: כזכור לכל $t\in I_p$, $\varphi_t(x)$ גזירה ב־p ו־$D\varphi_t(p)$ מקיימת

$$(\star)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[D\varphi_t(p)] = (D\varphi_t(p))' = DF(\varphi_t(p))D\varphi_t(p)$$
$$D\varphi_0(o) = \mathrm{id}$$

כאשר קראנו ל־$D\varphi_t(p) = M$ בעבר.
אבל p נקודת שיווי משקל כלומר $F(p)=0$ ולכן $\varphi_t(p)=p$ לכל t ומכאן נובע ש־$(\star)$ היא משוואה לינארית במקדמים קבועים ולכן $M' = DF(p)M$.
ולכן

$$D\varphi_t(p) = \exp(tDF(p))$$

בפרט מלמה 1.36 נובע ש־$\|\exp(tDF(p))\|_{op}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ ולכן יש $T>0$ שעבורו

$$\|\exp(TDF(p))\|_{op} < \frac{1}{4}$$

יהי $\varepsilon>0$ וקיימת $\delta>0$ כך שלכל $q\in B_\delta(p)$ ולכן $t\in[0,T]$ מתקיים $\varphi_t(q)\in B_\varepsilon(p)$ (מתלות רציפה בתנאי ההתחלה).
בנוסף מהקירוב הלינארי

$$\varphi_T(q) = \varphi_T(p) + D\varphi_T(p)(q-p)$$

ולכן על־ידי הקטנה של δ אם צריך נוכל להניח שהמחובר $o(p-q)$ לא עולה על $\frac{1}{4}\|p-q\|_{op}$.
כלומר

$$\|\varphi_T(q)-\varphi_T(p)\|_{op} \le \frac{\|q-p\|_{op}}{2}$$

בפרט $\varphi_T(q)\in B_\delta(p)$ שכן $\varphi_T(p)=p$ ושוב לכל $0\le t\le T$ מתקיים $\varphi_{T+t}(q)\in B_\varepsilon(p)$ (שוב מהרציפות בתנאי ההתחלה).
באיטרציה

$$\|\varphi_{kT}(q)-p\|_{op} \le 2^{-k}\|q-p\|$$

ולכן $t\in[0,T]$ ולכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\varphi_{kT+t}(q)\in B_\varepsilon(p)$ כלומר לכל $t>0$ $\varphi_t(q)\in B_\varepsilon(p)$ וזו בידיוק ההגדרה של יציבות.
נשאר להראות יציבות אסימפטוטית: קיבלנו ש־$\varphi_{kT}(q)\xrightarrow[k\to\infty]{}p$ לכל $q\in B_\delta(p)$.
שוב מאותה תלות רציפה בתנאי התחלה נקבל $\lim_{t\to\infty}\varphi_t(q)=p$ שכן לכל $\varepsilon'>0$ יש $\delta'>0$ כך שאם $y\in B_{\delta'}(p)$ אז לכל $t\in[0,T]$ נקבל

$$\|\varphi_t(y)-p\|_{op} < \varepsilon'$$

□

הגדרה 1.37 פונקציית ליאפונוב

יהי $p\in B\subseteq U$ כדור.
נאמר ש־$L:B\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות היא **פונקציית ליאפונוב** ל־F בנקודה p אם $\langle\nabla L,F(x)\rangle\le 0$ לכל $x\in B$ ול־L יש מינימום חזק / מינימום ממש ב־p (כלומר $L(p)\le L(x)$ לכל $x\in B$ עם שיוויון אם ורק אם $x=p$).
נאמר ש־L היא **פונקציית ליאפונוב חזקה** אם היא פונקציית ליאפונוב ומתקיים בנוסף $\langle\nabla L(x),F(x)\rangle<0$ לכל $x\neq p$.

משפט 1.38 משפט ליאפונוב

תהיי $p\in U$ נקודת שיווי משקל של F. אם ל־F יש פונקציית ליאפונוב ב־p אז p יציבה.
אם ל־F יש פונקציית ליאפונוב חזקה ב־p אז p יציבה אסימפטוטית.

סוף הרצאה 10 – 12/05

הוכחה: נוכיח ראשית שאם יש פונקציית ליאפונוב אז יש לנו יציבות.
יהי $r > 0$ ו־$L \in C^1(B_r(x_0))$ פונקציית ליאפונוב.
נשים לב שלכל $p \in B_r(x_0)$ אם נסתכל על המסילה x_p ונרכיב עליה את הפונקציה $L\big(x_p(t)\big)$ היא פונקציה יורדת מהגדרת פונקציית ליאפונוב היא יורדת כל זמן שהיא מוגדרת מכלל השרשרת

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(L\big(x_p(t)\big)\big) = \big(x_p'(t), \nabla L\big(x_p(t)\big)\big) = \big(F\big(x_p(t)\big), L\big(x_p(t)\big)\big) < 0$$

יהי $r > \varepsilon > 0$ ומתכונה (2) של פונקציית ליאפונוב ($L(x_0) \le L(x)$) נקבל ש־$L(x_0) < \min\limits_{x \in \partial B_\varepsilon(x_0)} L(x)$.
לכן קיים $\delta > 0$ כך ש־$\max\limits_{x \in B_\delta(x_0)} < \min\limits_{x \in \partial B_\varepsilon(x_0)} L(x)$.
כעת, אם $p \in B_\delta(x_0)$ מתקיים שאם יש $t > 0$ שעבורו $x_p(t) \notin B_\varepsilon(x_0)$ אז קיים $t_\star$ כך ש־$x_p(t_\star) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ אבל אז $L\big(x_p(t_\star)\big) > L\big(x_p(0)\big) = L(p)$ בסתירה למונוטוניות.
כעת נראה ליאפונוב חזקה גורר יציבות אסימפטוטית.
יהי $0 < R < r$ ומכך שזו פונקציית ליאפונוב חזקה נובע שיש $\eta > 0$ כך שלכל $p \in B_\eta(x_0)$ כך ש־$x_p(t) \in B_R(x_0)$ לכל $t \ge 0$.
נרצה להראות שלכל $p \in B_\eta(x_0)$ מתקיים ש־$x_p(t) \to x_0$. נניח שלא ככה, כלומר יש $p \in B_\eta(x_0)$ ויש $\varepsilon > 0$ וסדרת זמנים $t_k \to \infty$ כך ש־$d\big(x_p(t_k), x_0\big) \ge \varepsilon$.
נסמן ב־$M = \max_{x \in B_R(x_0)} \|F(x)\|$ ונסמן $C = \max\big\{\langle \nabla L(x), F(x)\rangle \mid \frac{\varepsilon}{2} \le \|x - x_0\| \le R\big\}$ ונבחין ש־$0 > C$ (מהאי־שיוויון החזק).
נשים לב שאם $\big\|x_p(t) - x_0\big\| > \varepsilon$ אז לכל $t \le s \le t + \frac{\varepsilon}{2M}$ מתקיים ש־$\big\|x_p(s) - x_0\big\| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ שכן

$$\left\| \int_t^s x_p'(u)\,\mathrm{d}u \right\| \le M|s - t| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת נניח על־ידי צמצום לתת־סדרה (אם צריך) ש־$\big|t_{k+1} - t_k\big| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ונחשב את $L\big(x_p(t)\big)$ עבור $t > 0$

$$\begin{aligned}
L\big(x_p(t)\big) &= L(p) + \int_0^t \big(L\big(x_p(s)\big)\big)'\,\mathrm{d}s \\
&= L(p) + \int_0^t \langle \nabla L\big(x_p(s)\big), F\big(x_p(s)\big)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&\le L(p) + \sum_{k=1}^{n \mid t_{n+1} \le t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \langle \nabla L\big(x_p(s)\big), F\big(x_p(s)\big)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&\le L(p) + \sum_{k=1}^{n \mid t_{n+1} \le t} \int_{t_k}^{t_k + \frac{\varepsilon}{2M}} \langle \nabla L\big(x_p(s)\big), F\big(x_p(s)\big)\langle\,\mathrm{d}s \\
&= L(p) + \sum_{k=1}^{n \mid t_{n+1} \le t} C \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \xrightarrow[t \to \infty]{} -\infty
\end{aligned}$$

אבל זאת סתירה כי L חסומה ב־$\overline{B_R(x_0)}$ לכן לכל $p \in B_\eta(x_0)$ מתקיים $x_p(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_0$. □

דוגמה

נניח ש־$H : U \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות (כרגיל U פתוחה) ו־J מטריצה אנטי־סימטרית ($J^t = -J$) ונגדיר $F = J\nabla H$ אז H פונקציית ליאפונוב (לא חזקה) עבור F היכן ש־x_0 היא נקודת מינימום של H (ברור שאם x_0 מינימום (חזקה) של H אז $F(x_0) = 0$).
H פונקציית ליאפונוב שכן

$$\begin{aligned}
\langle F, \nabla H\rangle &= \langle J\nabla H, \nabla H\rangle \\
&= \langle \nabla H, J^t \nabla H\rangle \\
&= \langle J^t \nabla H, \nabla H\rangle \\
&= -\langle J\nabla H, \nabla H\rangle = 0
\end{aligned}$$

אם x_0 נקודת שיווי משקל יציבה, האם ייתכן ש־x_0 נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית? לא ייתכן דבר כזה.
כי $\langle F, \nabla H\rangle = 0$ אומר ש־H נשארת קבועה לאורך המסלולים (זה בעצם קווי גובה) למה? כי

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H\big(x_p(t)\big) = \langle \nabla H, x_p'(t)\rangle = \langle \nabla H, F\rangle = 0$$

דוגמה

נסמן ב־f את הכוח, אז החוק השני של ניוטון: $f = ma$ ומיריעות אנחנו יודעים שהפוטנציאל הוא $-\nabla V = f = ma$.
נסמן את המיקום ב־q והתנע זה $p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} mq = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q$.
בהינתן N גופים תלת מימדיים יש $3N$ קורדינאטות מיקומים ו־$3N$ קורדינאטות של תנעים $x = (q_1, ..., q_{3N}, p_1, ..., p_{3N})$.
אז

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i = (-\nabla V)_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

אבל

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i = \frac{p_i}{m} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{p_i^2}{2m}\right)$$

נסכום

$$H = \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}}_{\text{אנרגיה קינטית}} + \underbrace{V(q_1, ...q_{3N})}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}}$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

כלומר

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{3N} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{3N} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_{3N} \\ -I_{3N} & 0 \end{pmatrix}}_{6N\times 6N} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_{3N}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_{3N}} \end{pmatrix}$$

המסקנה מהכתיבה הזו היא שתחת כוח משמר (שתלוי רק במיקום) נובע ש־H קבועה לאורך המסילות – כלומר H קבועה בזמן במערכת ו־H נקראת האנרגיה של המערכת ו־H נקראת המילטוניאן.

משפט 1.39 הקריטריון הלינארי לאי־יציבות

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ שדה גזיר ברציפות ו־$x_o \in U$ נקודת שיווי משקל.
אם ל־$DF(x_0)$ יש ערך עצמי עם חלק ממשי חיובי אז x_0 לא יציבה.

הוכחה: נוכיח את המשפט תחת ההנחה שלכל הערכים העצמיים של $A := DF(x_0)$ יש חלק ממשי שאינו אפס כלומר אין ל־A ערכים עצמיים עם חלק ממשי אפס.
נסמן H_+ יהיה תת־המרחב של $\mathbb{R}^n$ הנפרש על־ידי הוקטורים העצמיים (המוכללים אם צריך) עם ערך עצמי שלו חלק ממשי גדול מאפס ו־H_- וכן הלאה עם ערך עצמי שלו חלק ממשי קטן מאפס ומההנחה $\mathbb{R}^n = H_+ \oplus H_-$ ונסמן ב־$\pi_\pm$ את ההטלות המתאימות לסכום הישר (ההנחה של המשפט אומר ש־$H_+ \neq \{0\}$).

סוף הרצאה 11 – 18/05

נניח ש־$x_0 = 0$ ונניח בשלילה ש־0 יציבה, כלומר: לכל לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $p \in B_\delta(0)$ אז $x_p(t) \in B_\varepsilon(0)$.
נגדיר את הפונקציה $g(x) = F(x) - Ax$ כך שיתקיים

$$x'(t) = F(x(t)) = Ax(t) + g(x(t))$$

לכן ניתן לכתוב את הפתרון למשוואה באופן הבא

$$(\star\star)\ x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

להמשך ההוכחה אנחנו צריכים שתי למות

למה 1.40

קיים $R>0$ כך שאם $x:[0,\infty)\to B_R(0)$ פותרת את המשוואה $x'(t)=F(x(t))$ אז

$$x(t)=e^{tA}\pi_-(x(0))+\int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-g(x(s))\,\mathrm{d}s-\int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

הוכחה של למה 1.40: נשים לב

$$F(x)=F(0)+A(x+o(\|x\|))$$

ולכן מכך ש־$F(0)=0$

$$g(x)=F(x)-Ax=o(\|x\|)$$

בפרט, יש $R>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\|g(x)\|\le\|x\|$ ובנוסף

$$\pi_\pm e^{tA}=e^{tA}\pi_\pm$$

נכפול את $(\star\star)$ ב־e^{tA} ונפעיל את π_+ ונקבל (כי π_+ זו העתקה לינארית וגם אינטגרל הוא לינארי)

$$(\star\star\star)\ e^{-tA}\pi_+x(t)=\pi_+(x(0))+\int_0^t e^{-sA}\pi_+g(x(s))\,\mathrm{d}s\Longrightarrow\pi_+(x(0))=-\int_0^\infty e^{-sA}\pi_+g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

נרצה להראות את החץ מימין: קיים קבוע $C>0$ כך שאם $0<\mu<\min\{|Re(\lambda)|\mid A$ ערך עצמי של $\lambda\}$ ואז

$$\|\pi_\pm\|_{op}\le C$$

אז לכל $t>0$

$$\|e^{tA}\pi_-x\|\le Ce^{-\mu t}\|x\|$$

ולכל $t<0$

$$\|e^{tA}\pi_+x\|\le Ce^{-\mu|t|}\|x\|$$

לכן אם $x(t)\in B_r(0)$ לכל $t<0$ נובע

$$\|e^{-tA}\pi_+(x(t))\|\le C^2e^{-\pi t}R\xrightarrow[t\to\infty]{}0$$

בנוסף לכל $s>0$

$$\|g(x(s))\|\le\|x(s)\|$$

ולכן

$$\|e^{-sA}+\pi_+g(x(s))\|\le C^2e^{-s\mu}R$$

וזה אינטגרבילי ב־s ולכן ניתן ל־t לשאוף לאינסוף ב־$(\star\star\star)$ ונקבל

$$\pi_+(x(0))=-\int_0^\infty e^{-sA}\pi_+g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

נתבונן

$$x(t)=e^{tA}x(0)+\int_0^t e^{(t-s)A}g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

ונקבל

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{tA}\pi_+(x(0))+e^{tA}\pi_-(x(0))+\int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-g(x(s))\,\mathrm{d}s+\int_0^t e^{(t-s)A}\pi_+g(x(s))\,\mathrm{d}s\\&=e^{tA}\pi_-(x(0))+\int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-g(X(s))\,\mathrm{d}s-\int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+g(x(s))\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

□

למה 1.41

קיים $R > R_0 > 0$ מהלמה הקודמת כך שאם $x, y : [0,\infty) \to B_{R_0}(0)$ הם פתרונות ל־$x' = F(x)$ כך ש־$\pi_-(x(0)) = \pi_-(y(0))$ אז $x(t) = y(t)$ לכל t.

הוכחה של למה 1.41: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $R > R_0 > 0$ (R מהלמה הקודמת) כך שלכל $z_1, z_2 \in B_{R_0}(0)$ מתקיים

$$\|g(z_1) - g(z_2)\| < \varepsilon \|z_1 - z_2\|$$

זה נובע מהגזירות ברציפות של F : כי לכל z_1, z_2 מתקיים

$$F(z_2) = F(z_1) + DF(z_1)(z_2 - z_1) + o(\|z_2 - z_1\|) = F(z_1) + A(z_2 - z_1) + (DF(z_1) - A)(z_2 - z_1) + o(\|z_2 - z_1\|)$$

לכן

$$g(z_2) - g(z_1) = (DF(z_1) - A)(z_2 - z_1) + o(\|z_2 - z_1\|)$$

סוף הרצאה 12 – 19/05

נקבע $R_0 = R_0(\varepsilon)$ עבור $\varepsilon = \varepsilon(C, \mu)$ עבור μ מהלמה הקודמת שנגדיר בהמשך. נניח ש־x, y פתרונות עם $\pi_-(y(0)) = \pi_-(x(0))$ כך ש־$x \neq y$ ל־$t > 0$ ו־ $x(t), y(t) \in B_{R_0}(0)$ ונסמן

$$d = \sup_{t \in [0,\infty)} \|x(t) - y(t)\|$$

היות ש־$R > R_0$ ו־$x(t), y(t) \in B_R(0)$ ל־$t > 0$ ובפרט המסקנה של הלמה הקודמת נכונה עבורם. כלומר

$$x(t) = e^{tA}\pi_-(x(0)) + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)))\,\mathrm{d}s$$

וכנל עבור y.
לכן

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)) - g(y(s)))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)) - g(y(s)))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_0^t \left\| e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)) - g(y(s))) \right\| + \int_t^\infty \left\| e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)) - g(y(s))) \right\| \\
&\leq \int_0^t Ce^{-(t-s)\mu}\|g(x(s)) - g(y(s))\,\mathrm{d}s\| + \int_t^\infty Ce^{(t-s)\mu}\|g(x(s)) - g(y(s))\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \varepsilon \int_0^t Ce^{-(t-s)\mu}\|x(s) - y(s)\|\,\mathrm{d}s + \varepsilon \int_t^\infty Ce^{(t-s)\mu}\|x(s) - y(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq 2\varepsilon Cd \left(\int_0^t e^{-s\mu}\,\mathrm{d}s + \int_t^\infty e^{-s\mu}\,\mathrm{d}s \right) \\
&= 2\varepsilon Cd \int_0^\infty e^{-s\mu}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{2\varepsilon Cd}{\mu}
\end{aligned}$$

כאשר אי־השיוויון השני נובע מהלמה הקודמת.
אז נבחר $\varepsilon = \frac{\mu}{4C}$ ונקבל לעיל $\frac{d}{2}$ אבל זו סתירה כי d זה אומר ש־$d = 0$ (נזכר ש־$\|x(t) - y(t)\| = d$). □

נבחין שההוכחה של למה 1.41 מראה שיציבות היא בלתי אפשרית. שכן, אם x_0 נקודה יציבה אז קיימת $\eta > 0$ כך שלכל $p \in B_\eta(0)$ מתקיים $x_p(t) \in B_{R_0}(0)$ לכל $t > 0$.
בפרט, קיימים $x \neq y$ כמו בלמה עם $\pi_-(x) = \pi_-(y)$ ולכן $x(0) = y(0)$. □

2 מערכות שטורם־ליוביל (לא בחומר למבחן)

2.1 מוטיבציה קצרה

מה המשוואה שמתארת את התזוזה של מיתר? היא נתונה על־ידי $u = (x,t)$ ומתקיים

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c הוא קבוע פיזיקלי ועבורנו הוא 1.
נניח שניתן לכתוב פתרון u בצורה $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ אז

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi(x)\psi''(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x)\psi(t)$$

$$\Longrightarrow \varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t) \Longleftrightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} = \lambda$$

כלומר $\psi''(t) = \lambda\psi(t)$ וגם $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$.
מה התנאים הטבעיים שהמיתר מספר לנו?

$$\forall t,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

אז

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

התנאי שלנו של $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ זה לא תנאי התחלתי זה תנאי שפה.
אז אם נסתכל על המערכת $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$ אז עבור $\lambda > 0$ הפתרונות הם צירוף לינארי של $e^{\pm\sqrt{\lambda}x}$ אבל זה כמובן לא ייתכן, $\lambda = 0$ זה פיתרון טריוויאלי ואם $\lambda < 0$ נסמן $\lambda = -m^2$ ונקבל

$$\varphi(x) = A_m\cos(mx) + B_m\sin(mx)$$

אבל $\varphi(0) = 0$ ולכן $A_m = 0$ אבל גם $\varphi(\pi) = 0$ אז $m \in \mathbb{Z}$ ולכן $\varphi_m(x) = B_m\sin(mx)$.

2.2 משוואות עם תנאי שפה

הגדרה 2.1 מערכת שטורם ליוביל

יהי $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ קטע ויהיו $p,q : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירות ברציפות.
המשוואה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right] + q(t)u(t) = 0$$

נקראת משוואת שטורם־ליוביל (S-L).
נאמר שהיא רגולרית אם $p(t) > 0$ לכל $t \in [a,b]$ ואנחנו נתבונן רק במשוואות רגולריות.
נוסיף למשוואה תנאי שפה – כלומר תנאים על u בנקודות a,b, למשל

1. תנאי דיריכלה – $u(a) = 0 = u(b)$
2. תנאי דיריכלה מוכלל – $u(a) = A, u(b) = B$
3. תנאי נוימן $u'(a) = 0 = u'(b)$
4. תנאי נוימן מוכלל $u'(a) = A, u'(b) = B$
5. מעורבב $u(a) = A, u'(b) = B$
6. מחזוריים $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$

משוואת S-L עם תנאי שפה נקראת מערכת $S - L$.

סוף הרצאה 13 – 25/05

דוגמה

ראינו שלמשוואה $u''(t) + u(t) = 0$ על $[0,\pi]$ עם $u(0) = u(\pi) = 0$ יש אינסוף פתרונות (למעשה כל כפולה בסקלר של $\sin(t)$).
מצד שני, אותה משוואה עם התנאים $u(0) = 0, u(\pi) = 1$ אין בכלל פתרון.

משפט 2.2

עבור משוואות S-L רגולרית הבאים שקולים

1. לכל $A, B \in \mathbb{R}$ יש פתרון יחיד u שמקיים $u(a) = A, u(b) = B$
2. הפתרון היחידי עבורו תנאי השפה דיריכלה $u(a) = 0 = u(b)$ הוא פתרון ה־0

הוכחה: ברור ש־1 גורר את 2. בכיוון השני, יהיו $A, B \in \mathbb{R}$.
מרחב הפתרונות למשוואה הוא מרחב לינארי דו־מימדי (זו משוואה לינארית מסדר 2). נתבונן בהעתקה ששולחת פתרון u לערכים $\begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
זו העתקה לינארית ומההנחה שלנו הגרעין שלה הוא הגרעין הטריוויאלי – וקטור האפס ולכן זו העתקה חד־חד ערכית ועל וזה בידיוק מה שרצינו.
(הגרעין הוא טריוויאלי ולכן חד־חד ערכית וזו העתקה מ־$\mathbb{R}^2$ ל־$\mathbb{R}^2$ ולכן על). □

הערה

מעתה נתבונן במערכות S-L עם תנאי שפה דיריכלה.

1. יש עוד משוואות דיפרנציאליות חלקיות שפיתרון שלהן בעזרת הפרדת משתנים מוביל למערכת S-L ולא רק משוואת המיתר שלנו
2. הביטוי במערכת S-L עם תנאי שפה דיריכלה

$$\begin{aligned} (p(t)u'(t))' + q(t)u(t) \ (=0) \\ u(a) = 0 = u(b) \end{aligned}$$

מגדירה העתקה לינארית (למשל) ממרחב הפונקציות החלקות על $[a, b]$ עם תנאי השפה לעצמו.
לשם הדיון נניח ש־p, q חלקות ובהקשר הזה מאוד טבעי לשאול על וקטורים עצמיים, כלומר פונקציות u שמקיימות

$$(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = \lambda u(t)$$

משוואות המיתר הובילה אותנו למשוואה כזו! משוואת הערכים העצמיים שקולה בעצם למשוואה

$$(p(t)u'(t))' + (q(t) - \lambda)u(t) = 0$$

נתמקד בפיתרון בעיית הערכים העצמיים עבור מערכת S-L. למעשה, נתבונן בבעיה כללית יותר

$$(p(t)u'(t))' + (q(t) + \lambda\rho(t))u(t) = 0$$

יש המון מערכות עם התנהגות דומה (דיסקרטיות, רציפות ואחרות)

3. בהקשר הזה, מוטיבציה נוספת מגיעה מכך שההעתקה הלינארית המתוארת על־ידי משוואת S-L מתארת המילטוניאן קוונטי

$$\underbrace{(p(t)u'(t))'}_{\text{אנרגיה קינטית}} + \underbrace{q(t)u(t)}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}}$$

והערכים העצמיים הם הגדלים שניתן לקבל במדידת האנרגיה של המערכת

האסטרטגיה שלנו לחקר מערכת S-L: נעביר את הוקטור $\begin{pmatrix} u(t) \\ p(t)u'(t) \end{pmatrix}$ לקורדינאטות פולאריות, נכתוב עבורן משוואות ונגדיר

$$\begin{aligned} u(t) &= r(t)\sin(\theta(t)) \\ p(t)u'(t) &= r(t)\cos(\theta(t)) \end{aligned}$$

u מקיימת

$$(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = 0$$

מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) - \frac{1}{p}(p(t)u'(t)) = 0$$

אז

$$r'(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\cos(\theta(t))\theta'(t) - \frac{1}{p(t)}r(t)\cos(\theta(t)) = 0$$

ובנוסף, מהמשוואה

$$r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t))\theta'(t) + q(t)r(t)\sin(\theta(t)) = 0$$

מכאן

$$r'(t) = \left(\frac{1}{p} - q(t)\right) r(t) \cos(\theta(t) \sin(\theta(t)))$$
$$\theta'(t) = q(t) \sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)} \cos^2(\theta(t))$$

יונתן טוען שהראשונה לא חשובה והשנייה כן – היא לא לינארית אבל היא מסדר ראשון.

סוף הרצאה 14 – 26/05

נבחין שעבור $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$\theta(t) = \pi k \iff u(t) = 0$$

לכן אם נתרגם $u(0) = 0$ ל־$\theta(0) = 0$ נקבל ש־u פתרון למערכת המשוואות שלנו עם תנאי שפה דיריכלה אם ורק אם $\theta(b) = \pi k$ לאיזשהו $k \in \mathbb{Z}$.
נתמקד כרגע במשוואה הבאה עבור מערכת S-L

$$\theta'(t) = q(t) \sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)} \cos^2(\theta(t))$$

טענה 2.3

נניח ש־$\theta, \tilde{\theta}$ שתי פונקציות המקיימות

$$\theta'(t) \geq q(t) \sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)} \cos^2(\theta(t))$$
$$\tilde{\theta}'(t) \leq q(t) \sin^2 \tilde{\theta}(t) + \frac{1}{p(t)} \cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)$$

ונניח בנוסף ש־$\tilde{a} \geq \tilde{\theta}(a)$. אזי $\theta(t) \geq \tilde{\theta}(t)$ לכל $t \in [a, b]$.
יתרה מזאת, אם $\theta(b) = \tilde{\theta}(b)$ אז $\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$ לכל $t \in [a, b]$.

הוכחה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right) \geq q(t)\left(\sin^2(\theta(t)) - \sin^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)\right) + \frac{1}{p(t)}\left(\cos^2(\theta(t)) - \cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)\right)$$

ידוע שמתקיים

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \implies \left|\sin^2(x) - \sin^2(y)\right| = |(\sin(x) + \sin(y))(\sin(x) - \sin(y))| \leq 2|x - y|$$

וזה נכון גם עבור cos ולכן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right) \geq q(t)\left(\sin^2(\theta(t)) - \sin^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)\right) + \frac{1}{p(t)}\left(\cos^2(\theta(t)) - \cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)\right) \geq -L\left|\theta - \tilde{\theta}\right|$$

עבור $L > 0$.
נניח בשלילה שיש $a < t_1 \leq b$ כך ש־$\theta(t_1) < \tilde{\theta}(t_1)$ ונסמן $t_0 = \sup\left\{t \in [a, t_1), \theta(t) \geq \tilde{\theta}(t)\right\}$ ואז $\theta(t_0) = \tilde{\theta}(t_0)$ ולכל $t \in [t_0, t_1]$ מתקיים $\theta(t) \leq \tilde{\theta}(t)$ או בקטע הפתוח $t \in (t_0, t_1]$ מתקיים $\theta(t) < \tilde{\theta}(t)$. לכן בקטע $[t_0, t_1]$ מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right) \geq L\left(\theta(t) + \tilde{\theta}(t)\right)$$

ולכן הפונקציה $e^{-Lt}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right)$ מונוטונית עולה בקטע $[t_0, t_1]$ ולכן

$$e^{-Lt_1}\left(\theta(t_1) - \tilde{\theta}(t_1)\right) \geq 0$$

בפרט $\theta(t_1) \geq \tilde{\theta}(t_1)$ בסתירה להנחה שלנו ולכן $\theta(t) \geq \tilde{\theta}(t)$. בפרט, לכל $t \in [a, b]$ מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right) \geq -L\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right)$$

כלומר הפונקציה $e^{Lt}\left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)\right)$ מונוטונית עולה ואי־שלילית בקטע ולכן אם $\theta(b) = \tilde{\theta}(b)$ אז $\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$ לכל $t \in [a, b]$. □

מסקנה 2.4

נניח שהפונקציה θ (על הקטע $[a,b]$) מקיימת את אי־השיוויון

$$\theta'(t) \geq q(t)\sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta(t))$$

ויהי $k \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\theta(a) \geq \pi k$ אזי $\theta(b) > \pi k$.

הוכחה: נגדיר $\tilde{\theta} \equiv \pi k$ אזי

$$0 = \tilde{\theta}' < q(t)\underbrace{\sin^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{p(t)}\cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)}_{>0}$$

ומתקיים $\theta(a) \geq \tilde{\theta}(a)$ ולכן $\theta(b) \geq \tilde{\theta}(b)$ ולמעשה האי־שיוויון חזק כי אחרת היה שיוויון ואז θ הייתה קבועה והיינו מקבלים $\theta' \equiv 0$ ולכן $\theta(b) > \pi k$. □

מסקנה 2.5

יהי $p, \tilde{p}, q, \tilde{q}$ פונקציות גזירות ברציפות ב־$[a,b]$ כך ש־$0 < p(t) \leq \tilde{p}(t)$ ו־$q(t) \geq \tilde{q}(t)$ לכל $t \in [a,b]$.
יהיו $u, \tilde{u}$ פתרונות למשוואות שטורם־ליוביל המתאימות ו־$\theta, \tilde{\theta}$ הזוויות המתאימות (פונקציות הפאזה המתאימות/משתני פרופר המתאימים).
אם $\theta(a) \geq \tilde{\theta}(a)$ אז $\theta(t) \geq \tilde{\theta}(t)$ ואם $\theta(b) = \tilde{\theta}(t)$ אז $\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$ לכל $t \in [a,b]$.

הוכחה:

$$\theta'(t) = q(t)\sin^2(\theta(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta(t))$$
$$\tilde{\theta}'(t) = \tilde{q}(t)\sin^2\left(\tilde{\theta}(t)\right) + \frac{1}{\tilde{p}}(t)\cos^2\left(\tilde{\theta}(t)\right)$$

ולכן המשפט הוא מסקנה ישירה של הטענה (אם נחלק ונשתמש ב־$0 < p(t) \leq \tilde{p}(t), q(t) \geq \tilde{q}(t)$). □

מסקנה 2.6 **משפט ההשוואה של שטרום**

נניח ש־$0 < p(t) \leq \tilde{p}(t)$ ו־$q(t) \geq \tilde{q}(t)$ לכל t ויהיו $u, \tilde{u}$ פתרונות לא טריוויאליים למשוואות S-L המתאימות.
אם $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$ אז קיים $\tau \in (a,b]$ כך ש־$u(\tau) = 0$.

הוכחה: נתבונן ב־$\theta, \tilde{\theta}$ פונקציות הפאזה המתאימות. על־ידי הכפלה ב־(-1) אם יש בך צורך ניתן לדאוג ש־$\theta(a) \in [0,\pi)$.
באותו אופן ניתן להניח ש־$\tilde{\theta}(a) = 0$ ולכן $\tilde{\theta}(b) > 0$ מהמסקנה לפני הקודמת.
אבל $\tilde{u}(b) = 0$ ולכן $\tilde{\theta}(b) = \pi k$ לאיזשהו $k \in \mathbb{Z}$ ולכן $\tilde{\theta}(b) \geq \pi$ ומהמסקנה הקודמת $\theta(a) \geq \tilde{\theta}(a)$ ומהמסקנה הקודמת $\theta(b) \geq \tilde{\theta}(b) \geq \pi$ וממשפט ערך הביניים יש $\tau \in (a,b]$ שעבורו $\theta(\tau) = \pi$ אבל אז $u(\tau) = 0$, כנדרש. □

2.3 ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות

יהיו $p, q, \rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$ כך ש־$p, \rho > 0$ בקטע.

הגדרה 2.7

נאמר ש־$\lambda \in \mathbb{R}$ הוא ערך עצמי של המערכת S-L המתאימה לפונקציות p, q, ρ. אז יש פתרון שהוא לא זהותית אפס למערכת

$$(\star)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right) + (q(t) - \lambda\rho(t))u(t) = 0$$

וכן $u(a) = u(b) = 0$ פתרון u למערכת הזו ייקרא פונקציה עצמית.

כידוע, לכל λ ישנו פתרון יחיד למשוואה

$$(p(t)u'(t))' + (q(t) + \lambda\rho(t))u(t) = 0$$

המקיים

$$u(a) = 0, \qquad u'(a) = 1$$

נסמן אותו ב־u_λ.

סוף הרצאה 15 – 01/06

טענה 2.8

λ הוא ערך עצמי של המערכת אם ורק אם $u_\lambda(b)=0$ ובמקרה הזה כל וקטור/פונקציה עצמית היא כפל של u_λ בסקלר.

הוכחה: אם $u_\lambda(b)=0$ אז λ הוא ערך עצמי. מצד שני, אם λ הוא ערך עצמי אז קיימת פונקציה u כך ש־$u(a)=u(b)=0$ כאשר $u'(a)\neq 0$ המקיימת את $(\star)$ בהגדרה 2.7.
נתבונן ב־$\tilde{u}=u'(a)u_\lambda$.
נשים לב ש־$\tilde{u}(a)=0$ ו־$\tilde{u}'(a)=u'(a)$ ולכן מיחידות $u=\tilde{u}$ כי הם מסכימים על תנאי ההתחלה ובפרט

$$u'(a)u_\lambda(b)=\tilde{u}=u(b)=0$$

ולכן $u_\lambda(b)=0$. □

נגדיר r_λ,θ_λ להיות פונקציות האמפליטודה והפאזה של u_λ

$$\begin{pmatrix} p(t)u'_\lambda(t) \\ u_\lambda(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_\lambda(t)\cos(\theta_\lambda(t)) \\ r_\lambda(t)\sin(\theta_\lambda(t))\end{pmatrix}$$

נשים לב ש־$\theta_\lambda(a)=0$ כי הנגזרת של $u_\lambda(a)$ היא 1 ובפרט היא חיובית (אנחנו שומרים על מערכת המשוואות לעיל) ולכן ממה שר5אינו $\theta_\lambda(t)>0$ לכל $b\geq t>a$.

טענה 2.9

λ הוא ערך עצמי אם ורק אם $\theta_\lambda(b)=\pi n$ עבור $n\in\mathbb{N}$.

הוכחה: אנחנו יודעים ש־λ ערך עצמי אם ורק אם $u_\lambda(b)=0$ וזה קורה אם ורק אם $\theta_\lambda(b)=\pi n$ לאיזשהו $n\in\mathbb{Z}$ אבל $\theta_\lambda(b)>0$.
(הראינו שאם $\theta(a)=\pi n$ אז $\theta(b)>\pi n$) □

דוגמה

כשהסתכלנו על משוואת המיתר

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(t)+\lambda u(t)=0$$
$$u(a)=0=u(b)$$

מהי u_λ?

$$u_\lambda(t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}(t-a)\right) & \lambda>0\\ t-a & \lambda=0\\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}(t-a)\right) & \lambda<0\end{cases}$$

מתקיים ש־$u_\lambda(b)=0$ אפשרי רק עבור $\lambda>0$ (כי סינוס היפרבולי לא מתאפס)ואז זה קורה אם ורק אם $\sqrt{\lambda}(b-a)=\pi n$ עבור $n\in\mathbb{N}$.
כלומר הערכים העצמיים הם

$$\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{(b-a)^2}$$

והפונקציות העצמיות הן

$$u(t)=C\sin\left(\frac{\pi n(t-a)}{b-a}\right)$$

עבור C קבוע כלשהו.

טענה 2.10

אם $\theta_\lambda(b)=\pi n$ אז לפונקציה $u_\lambda(t)$ יש בידיוק $n-1$ אפסים בקטע הפתוח (a,b).

הוכחה: לכל $0\leq k\leq n$ נגדיר $\tau_k:=\inf\{t\in[a,b]\mid \theta_\lambda(t)\geq \pi k\}$.
נשים לב ש־$a=\tau_0$ ו־$\tau_n=b$ ומהגדרת האיפיומם זאת סדרה עולה

$$a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=b$$

לכל $t<\tau_k$ מתקיים $\theta_\lambda(t)<\pi k$ ו־$\theta_\lambda(\tau_k)=\pi k$ ועבור $t>\tau_k$ מתקיים $\theta_\lambda(t)>\pi k$.
אבל $u_\lambda(t)=0$ אם ורק אם $\theta_\lambda(t)=\pi k$ לאיזשהו k וזה קורה אם ורק אם $t=\tau_k$. □

אנחנו רוצים להבין מתי ולאיזה λ מתקיים $\theta_\lambda(b)=\pi n$ ונראה כעת שלכל $n\in\mathbb{N}$ יש λ יחיד כזה.

משפט 2.11

הפונקציה $\lambda \mapsto \theta_\lambda(b)$ היא רציפה ומונוטונית עולה ממש ויתרה מזאת

$$\lim_{\lambda\to\infty} \theta_\lambda(b) = \infty$$
$$\lim_{\lambda\to-\infty} \theta_\lambda(b) = 0$$

סוף הרצאה 16 – 02/06

הוכחה: את רציפות הפונקציה $\lambda \mapsto \theta_\lambda(b)$ נראה בתרגיל.
יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ עם $\lambda > \mu$ מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}u_\lambda(t)\right) + (q(t) + \lambda\rho(t))u_\lambda(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}u_\mu(t)\right) + (q(t) + \mu\rho(t))u_\mu(t) = 0$$

מתקיים $q(t) + \lambda\rho(t) > q(t) + \mu\rho(t)$ ולכן $\theta_\lambda(b) \geq \theta_\mu(b)$ כי ראינו שמכפלה כזאת מובילה לזווית גדולה יותר.
אם יש שיוויון, כלומר $\theta_\lambda(b) = \theta_\mu(b)$ ולכן $\theta_\lambda(t) = \theta_\mu(t)$ לכל t, אבל נשים לב

$$\theta'_\lambda(t) = (q(t) + \lambda\rho(t))\sin^2(\theta_\lambda(t)) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(\theta_\lambda(t))$$
$$\theta'_\mu = (q(t) + \mu\rho(t))\sin^2\big(\theta_\mu(t)\big) + \frac{1}{p(t)}\cos^2\big(\theta_\mu(t)\big)$$

אז בפרט גם $\theta'_\lambda = \theta'_\mu$ ולכן נובע ש־$\mu = \lambda$, בסתירה. ולכן $\lambda \to \theta_\lambda(b)$ היא מונוטונית עולה ממש.
נראה ש־$\lim_{\lambda\to\infty} \theta_\lambda(b) = \infty$.
יהי $n \in \mathbb{N}$, נגדיר

$$\hat{\mu}(t) = \sin\left(\pi n\frac{t-a}{b-a}\right)$$

נשים לב ש־$\hat{u}$ פותרת את המשוואה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_{\max}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t) + \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}p_{\max}\hat{u}(t)\right) = 0$$

היכן ש־$p_{\max} = \max\{p(t) \mid t \in [a,b]\}$ ונשים לב שמתקיים

$$\hat{u}(a) = 0 = \hat{u}(b)$$

נגדיר

$$p_{\max}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t) = \hat{r}(t)\cos\big(\hat{\theta}(t)\big)$$
$$\hat{u}(t) = \hat{r}(t)\sin\big(\hat{\theta}(t)\big)$$
$$\hat{\theta}(t) = 0$$

ניתן לבחור λ כך שיתקיים

$$\lambda\rho_{\min} \geq \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}p_{\max} - q_{\min}$$

ולכן

$$q(t) + \lambda\rho(t) \geq q_{\min} + \lambda\rho_{\min} \geq \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}p_{\max}$$

יתרה מזאת, $p(t) \leq p_{\max}$ ולכן $\theta_\lambda(b) \geq \hat{\theta}(b)$ אבל $\hat{\theta}(b) = \pi n$ ולכן מצאנו λ כך ש־$\theta_\lambda(b) \geq \pi n$ ומשרירותיות $n \in \mathbb{N}$ ולכן $\lim_{\lambda\to\infty} \theta_\lambda(b) = \infty$ (הגבול קיים ממונוטוניות).
נראה ש־$\lim_{\lambda\to-\infty} \theta_\lambda(b) = 0$.
יהי $0 < \varepsilon < \pi$ ונבחר $\lambda < 0$ כך שיתקיים

$$(q_{\max} + \lambda\rho_{\min})\sin^2(\varepsilon) + \frac{1}{p_{\min}}\cos^2(\varepsilon) < 0$$

היות ש־ρ פונקציה חיובית נוכל לבחור λ קטנה דיו שהביטוי לעיל יהיה שלילי (ובהתאם sin לא מתאפס שם), נראה ש־$\theta_\lambda(b) \le \varepsilon$. נניח שלא, כלומר $\theta_\lambda(b) > \varepsilon$ ונגדיר

$$\tau = \inf\{t \in [a,b] \mid \theta_\lambda(t) > \varepsilon\}$$

וקיימת סדרה $t_j \downarrow \tau$ כך ש־$\theta_\lambda(t_j) > \varepsilon$ ולכן $\theta'_\lambda(\tau) \ge 0$. מצד שני

$$\begin{aligned}
\theta'_\lambda(\tau) &= (q(\tau) + \lambda\rho(\tau))\sin^2(\theta_\lambda(\tau)) + \frac{1}{p(\tau)}\cos^2(\theta_\lambda(\tau)) \\
&= (q(t) + \lambda\rho(\tau))\sin^2(\varepsilon) + \frac{1}{p(\tau)}\cos^2(\varepsilon) \\
&\le (q_{\max} + \lambda\rho_{\min})\sin^2(\varepsilon) + \frac{1}{p_{\min}(\tau)} < 0
\end{aligned}$$

וזאת סתירה מההנחה שלנו לעיל ולכן $\theta_\lambda(b) < \varepsilon$ ומשרירותיות ε נקבל $\lim_{\lambda\to-\infty}\theta_\lambda(b) = 0$. □

מסקנה 2.12

קיימת סדרה עולה של מספרים ממשיים $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ כך שמתקיים

1. λ_n הוא הפיתרון היחידי של המשוואה $\theta_\lambda(b) = \pi n$
2. $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$
3. λ הוא ערך עצמי של המערכת S-L אם ורק אם $\lambda \le \lambda_n$ עבור $n \in \mathbb{N}$
4. לכל $n \in \mathbb{N}$ הפונקציה μ_{λ_n} היא פונקציה עצמית של המערכת S-L עם ערך עצמי λ_n. יתרה מזאת, לפונקציה μ_{λ_n} יש בידיוק $n-1$ אפסים בקטע (a,b)

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ יש λ_n כך ש־$\theta_{\lambda_n} = \pi n$ זאת משום הפונקציה $\theta \mapsto \theta_\lambda(b)$ היא רציפה ומתקיים

$$\lim_{\lambda\to\infty}\theta_\lambda(b) = \infty, \lim_{\lambda\to-\infty}\theta_\lambda(b) = 0$$

אז ממשפט ערך הביניים λ_n יחיד כי הפונקציה מונוטונית ממש וזה מוכיח את 1.
נשים לב ש־$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\theta_{\lambda_n}(b)}_{=\pi n} = \infty$ אבל הפונקציה $\lambda \mapsto \theta_\lambda(b)$ היא פונקציה רציפה וזה גורר ש־$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$ וזה סוגר את 2.
הראנו ש־λ ערך עצמי אם ורק אם $\theta_\lambda(b) = \pi n$ אם ורק אם $\lambda = \lambda_n$ וזה סוגר את 3 ואת 4 הראינו כבר. □

מסקנה 2.13

לכל מערכת S-L רגולריות $(\rho, p > 0)$ עם תנאי שפה דיריכלה יש אינסוף ערכים עצמיים.

סוף הרצאה 17 – 08/06

3 משוואות דיפרנציאליות חלקיות

3.1 משוואת לפלס

הגדרה 3.1 משוואת לפלס

עבור $u \in C^2(\Omega)$ עבור $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה נגדיר את משוואת לפלס להיות המשוואה

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

ול־Δu אנחנו קוראים הלפלסיאן ול־u אנחנו קוראים פונקציה הרמונית.

הערה

1. באופן שקול, Δu הוא ה־div של הגרדיאנט (הדיברגנס הופך שדה לסקלר והסקלר אומר מה הקצב של ההתרחבות של השדה) וזה בעצם אנלוג טבעי לנגזרת השנייה במימד אחד.
2. אם $u \in C^2(\Omega)$, H ההסיאן כאשר $H_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ מטריצת הנגזרות החלקיות. אז $\Delta u = \operatorname{tr} H(u)$.
היות שהעקבה לא משתנה תחת שינוי בסיס, Δu אינווריאנטי לסיבובים ולהזזות.

דוגמה

1. אם $n = 1$ ו־u הרמונית אז $u(x) = ax + b$
2. אם $n = 2$ טבעי להסתכל על המרוכבים אז $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ הולומורפית כלומר גזירה לפי z אז $f(z) = u + iv$ עבור $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הרמוניות כאשר $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.
כאשר $u(x,y) = Re(f(x+iy)), v(x,y) = Im(f(x+iy))$. למה? כי פונקציה הולומורפית מקיימת את משוואות קושי רימן

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

משפט 3.2 תכונת הערך הממוצע של פונקציות הרמוניות

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהיי $u \in C^2(\Omega)$ אזי u הרמונית ב־Ω אם ורק אם לכל $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \Omega$ (כדור שהסגור שלו ב־Ω) מתקיים

$$\fint_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}v := \frac{1}{\operatorname{Vol}(B(x_0,r_0))} \int_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}v = u(x_0) \iff \fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}s = \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial B(x_0,r_0))} \int_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}s = u(x_0)$$

הוכחה: נניח ראשית ש־u הרמונית ויהי $\overline{B(x_0,r_0)} \subseteq \Omega$ נראה ש־$\fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}s = u(x_0)$.
נראה זאת על־ידי שנגדיר לכל $0 < r \le r_0$ את $\varphi(r) = \fint_{\partial B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}s$ ונראה ש־$\varphi'(r) = 0$ ואז מרציפות u נובע $\lim_{r\to 0} \varphi(r) = u(x_0)$ שכן לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש־ אם $y \in B(x_0,\delta)$ אז $|u(y) - u(x_0)| < \varepsilon$ ואז עבור $0 < r < \delta$ מתקיים

$$|u(x_0) - \varphi(r)| = \left| \fint_{\partial B(x_0,r)} -u(x_0) \right| = \left| \fint_{\partial B(x_0,r)} (u(s) - u(x_0)) \,\mathrm{d}s \right| \le \fint_{\partial B(x_0,r)} |u(s) - u(x_0)| \,\mathrm{d}s < \varepsilon \fint_{\partial B(x_0,r)} \mathrm{d}s = \varepsilon$$

נגדיר $\psi_r : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(x_0,r)}$ על־ידי $\psi_r(y) = x_0 + ry$ אז ψ_r הוא דיפאומורפיזם בין השפות עם יעקוביאן r^{n-1}.

$$\fint_{\partial B(0,1)} (u \circ \psi_r) \,\mathrm{d}s = \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial B(0,1)) \cdot r^{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} (u \circ \psi_r) r^{n-1} \,\mathrm{d} = \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial B(x_0,r))} \int_{\partial B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}s = \varphi(r)$$

תרגיל 3.3

$$\operatorname{Area}(\partial B(0,1)) \cdot r^{n-1} = \operatorname{Area}(\partial B(x_0,r))$$

ולכן

$$\varphi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} \frac{\partial}{\partial r}(u \circ \psi_r) \,\mathrm{d}s = \fint_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u, \hat{n} \rangle \,\mathrm{d}s \underset{(\star)}{=} \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial B(0,1))} \int_{B(0,1)} \operatorname{div}(\nabla u) \,\mathrm{d}v \underset{(\star\star)}{=} \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial B(0,1))} \int_{B(0,1)} \Delta u \,\mathrm{d}v \underset{(\star\star\star)}{=} 0$$

כאשר $(\star)$ זה משפט הדיברגנץ, $(\star\star)$ זו הגדרת הלפלסיאן ו־$(\star\star\star)$ זה מהיות u הרמונית.
הראינו שאם u הרמונית אזי $\fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}s = u(x_0)$ ו־$\varphi(r) = \fint_{\partial B(x_0,r)}$ עבור $0 < r \le r_0$ אז u קבועה אז

$$
\begin{aligned}
\fint_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}v &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,r_0))}\int_0^{r_0} \mathrm{d}r \int_{\partial B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,r_0))}\int_0^{r_0} \mathrm{d}r \frac{\mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))}{\mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))}\int_{\partial B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{u(x_0)}{\mathrm{Vol}(B(x_0,r_0))}\int_0^{r_0} \mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))\,\mathrm{d}r \\
&= u(x_0)
\end{aligned}
$$

אז הראינו שאם u הרמונית אזי $\fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}s = u(x_0)$ והראינו ש־$\fint_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}v = u(x_0)$.
נשאר להראות את הכיוון השני ולכן נניח ש־u לא הרמונית ולכן יש כדור קטן שעליו $\Delta u > 0$ (בלי הגבלת הכלליות, יכול להיות גם קטן מאפס) אבל אז מההנחה ש־$\fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}s = u(x_0)$ נקבל ש־$\varphi'(r) = 0$ אבל זאת סתירה. □

סוף הרצאה 18 – 09/06

משפט 3.4 **עיקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות**

נניח ש־$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וחסומה ונניח ש־$u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ הרמונית.

1. העיקרון החלש – המקסימום מתקבל על השפה

$$\max u\left(\overline{\Omega}\right) = \max u(\partial\Omega)$$

2. העיקרון החזק – אם Ω קשירה וקיים $x_0 \in \Omega$ כך ש־$u(x_0) = \max u\left(\overline{\Omega}\right)$ אז u קבועה

הוכחה:

1. יהי $x_0 \in \overline{\Omega}$ כך ש־$u(x_0) = \max u\left(\overline{\Omega}\right)$. אם $x_0 \in \partial\Omega$ אז סיימנו. אחרת, יש $r > 0$ כך ש־$B(x_0,r) \subseteq \Omega$ מתקיים $u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}V$.
אבל זה אומר שלכל $y \in B(x_0,r)$ מתקיים $u(y) = u(x_0)$ שכן אם לא מתקיים $u(y) < u(x_0)$ (כי $u(x_0)$ מקסימום) ולכן מרציפות יש קבוצה פתוחה $B(x_0,r) \supseteq$ שעליה $u < u(x_0)$ ואז $\fint_{B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}V < u(x_0)$.
אבל זה נכון לכל $r \leq \mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)$ ולכן לכל $y \in \partial\Omega \cap \partial B(x_0,\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega))$ מתקיים $u(y) = u(x_0) = \max u\left(\overline{\Omega}\right)$.
2. נניח ש־$x_0 \in \Omega$ מקיימת $u(x_0) = \max u(\Omega)$ ונתבונן בקבוצה $A := \{y \in \Omega \mid u(x_0) = u(y)\}$.
A סגורה מרציפות והיא לא ריקה כי $x_0 \in A$. אבל הראנו ש־A פתוחה ב־Ω אבל Ω קשירה ולכן $A = \Omega$.

□

הערה

אם u הרמונית אז $-u$ הרמונית גם כן ולכן המשפט לגבי עיקרון המקסימום נכון גם למינימום.

מסקנה 3.5

אם $u, v \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{U}\right)$ כאשר Ω פתוחה וחסומה ומתקיים ש־$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$ ו־$\Delta u = \Delta v$. אז $u = v$.

הוכחה: $u - v$ פונקציה הרמונית ב־Ω ומקיימת $\min(u-v) = \max(u-v) = 0$ ולכן זו פונקציית האפס ו־$u = v$. □

נקבע פונקציה חלקה ואי־שלילית $\eta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ המקיימת $\eta|_{[0,\frac{1}{2})} = 1$ ועבור $x \geq 1$ ניקח $\eta(x) = 0$.
בהינתן $\varepsilon > 0$ נגדיר $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\eta\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}\right)}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|y\|)\,\mathrm{d}y}$$

φ_ε חלקה, רדיאלית הנתמכת על $B(0,\varepsilon)$ ומקיימת $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

הגדרה 3.6 **שיכוך**

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. לכל $\varepsilon > 0$ נסמן

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x,\partial\Omega > \varepsilon)\}$$

נניח ש־$u \in C(\Omega)$ ויהי $\varepsilon > 0$. השיכוך של u בסקאלה ε הוא הפונקציה $u^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ שנתונה על־ידי

$$u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

בפרט u^ε חלקה (מהתרגיל).

משפט 3.7

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ונניח ש־$u \in C(\Omega)$ מקיימת את תכונת הערך הממוצע ב־Ω. אזי $u \in C^\infty(\Omega)$ (חלקה) ובפרט הרמונית.

הוכחה: מספיק להראות שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $u|_{\Omega_\varepsilon} = u^\varepsilon$.
עבור $x \in \Omega_\varepsilon$ מתקיים

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}V(y) \\
&= \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}s(y)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \int_0^\varepsilon \frac{\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^n} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}s(y)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \int_0^\varepsilon \frac{\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^n} \int_{\partial B(x,r)} u(x)\,\mathrm{d}s(y)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{u(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \int_0^\varepsilon \frac{\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^n} \int_{\partial B(x,r)} \mathrm{d}s(y)\,\mathrm{d}r \\
&= u(x) \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi^\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}V(y) \\
&= u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

□

מסקנה 3.8

פונקציות הרמוניות הן חלקות.

מסקנה 3.9

גבול במידה שווה של פונקציות הרמוניות הוא הרמוני (ב־$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה).

הוכחה: אם $(f_n)_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות הרמוניות ו־$f_n \rightrightarrows f$ (במידה שווה). אז f_n רציפות ולכן f רציפה. בנוסף, לכל $x \in \Omega$ מתקיים

$$\fint_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}V(y) = \lim_{n\to\infty} \fint_{B(x,r)} f_n(y)\,\mathrm{d}V(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

□

משפט 3.10 **הערכת נגזרות לפונקציות הרמוניות**

לכל $n,k \in \mathbb{N}$ יש קבוע $0 < C(n,k)$ כך שלכל קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ולכל $u : \Omega \to \mathbb{R}$ הרמונית ולכל מולטי־אינדקס $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (אינדקס וקטורי) עם $|\alpha| = \sum \alpha_i = k$ ולכל $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$ מתקיים

$$|D^\alpha u(x)| = \left| \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u(x) \right| \le \int_{B(x,r)} |D^\alpha \varphi_r(x-y)||u(y)|\,\mathrm{d}y \le \frac{C(n,k)}{r^{n+k}} \int_{B(x,r)} |u(y)|\,\mathrm{d}y$$

הוכחה: מתקיים $u|_{\Omega_r} = u^r$ ולכן $D^\alpha u(x) = D^\alpha \varphi_r * u$ כאשר

$$\varphi_r(x-y) = \frac{1}{r^n \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \eta\left(\frac{\|x-y\|}{r}\right)$$

על־כל גזירה יוצאת חזקה של r החוצה ואת שאר הגורמים ניתן לחסום מכך ש־η נתמכת קומפקטית וחלקה. □

סוף הרצאה 19 – 15/06

משפט 3.11 **אי־שיוויון הרנאק**

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהיי $V \subseteq \Omega$ פתוחה, קשירה וחסומה כך ש־$\overline{V} \subseteq \Omega$. אזי יש קבוע $0 < C(\Omega, V)$ כך שלכל $u : \Omega \to \mathbb{R}$ הרמונית ואי־שלילית מתקיים

$$\sup u(V) \leq C(\Omega, V) \cdot \inf u(V)$$

הוכחה: נוכיח קודם מקרה פרטי. נניח ש־$V = B(x, r)$ ונניח גם ש־$\overline{B(x_0, 4r)} \subseteq \Omega$ ונקבע $x_0, x_1 \in V$.
מאי־שיוויון המשולש $B(x_1, r) \subseteq B(x_0, 3r)$ ו־$\overline{B(x_0, 3r)} \subseteq \Omega$ ולכן מערך הממוצע ומאי־שליליות של u

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0, 3r))} \int_{B(x_0, 3r)} u(y)\,\mathrm{d}y \\ &\geq \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0, 3r))} \int_{B(x_1, r)} u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{Vol}(B(x_1, r))}{\mathrm{Vol}(B(x_0, 3r))} u(x_1) \\ &= 3^{-n} u(x_1) \end{aligned}$$

כלומר עבור המקרי הפרטי אפשר לקחת את הקבוע להיות 3^n.
למקרה הכללי, מקומפקטיות יש אוסף סופי של נקודות $p_1, ..., p_M \in \overline{V}$ ורדיוסים $r_1, ..., r_M > 0$ כך ש־$\overline{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^M B(p_i, r_i)$ ו־$\overline{B(p_i, 4r_i)} \subseteq \Omega$ לכל i.
נקבע $x_0, x_1 \in V$ ומכך ש־V תת־קבוצה פתוחה וקשירה של $\mathbb{R}^n$ אז היא קשירה מסילתית. לכן נקבע איזושהי מסילה ב־V שמקשרת בין x_0 ו־x_1 והמסילה מכוסה על־ידי לכל היותר M מהכדורים. בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח שאפשר להתקדם מ־x_0 ל־x_1 על־גבי המסילה כאשר בכל צעד אנחנו עוברים מכדור נתון לכדור שעדיין לא ביקרנו בו ובכל מעבר כזה אנחנו צוברים פקטור של לכל היותר 3^{-n} בהפרש בין ערכי u על נקודות הקצה של המעבר ולכן $C(\Omega, V) = 3^{nM}$ הקבוע הנדרש. □

3.2 בעיית דיריכלה

נתונה קבוצה פתוחה וחסומה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ יפה מספיק ונתונות פונקציות $g \in C(\partial\Omega)$ ו־$f \in C(\Omega)$. איך למצוא $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ כך ש־$u|_{\partial\Omega} = g$ ו־$\Delta u|_\Omega = f$.
זו בעיית דיריכלה למשוואת פואסון והמקרה הפרטי $f = 0$ נקרא בעיית דיריכלה למשוואת לפלס/לפונקציות הרמוניות.
איך פותרים בעיה כזאת? האסטרטגיה שלנו היא שאם נניח שיש לנו פונקציה $K : \Omega \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ המקיימת שלכל y, $\Delta_x K(x, y) = 0$ ונניח בנוסף שמתקיים

$$\lim_{x \to y_0} \int_{\partial\Omega} K(x, y) g(y)\,\mathrm{d}s(y) = g(y_0)$$

אז אם K מספיק "יפה" כדי שיהיה אפשר להצדיק גזירה מתחת לסמן האינטגרל, אז עבור

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) g(y)\,\mathrm{d}s(y) \Longrightarrow \Delta u(x) = \int_{\partial\Omega} \Delta_x K(x, y) g(y)\,\mathrm{d}s(y) = 0$$

אז נקבל פונקציה הרמונית ובנוסף $\lim_{x \to y_0 \in \partial\Omega} u(x) = g(y_0)$.

דוגמה

נזהה $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. נתבונן בפונקציה $K(z, w) = Re\left(\frac{z+w}{w-z}\right)$ כאשר $w \in \partial\mathbb{D}, z \in \mathbb{D}$ ו־$\Omega = \mathbb{D}$. K הרמונית כי החלק הממשי של פונקציה הולומורפית.

$$K(z, w) \underset{\substack{w = e^{it} \\ z = re^{i\theta}}}{=} Re\left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}}\right) = Re\left(\frac{1 + re^{i(\theta - t)}}{1 - re^{i(\theta - t)}}\right)$$

אנחנו רוצים להבין את ההתנהגות של $K(z, w)$ כאשר $z \to w_0 = e^{it_0} \in \partial\mathbb{D}$. נסמן $\theta' = \theta - t$ ואנחנו רוצים להתבונן באינטגרל

$$\int_{\partial\mathbb{D}} K(z, w) g(w)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K\left(re^{i\theta}, e^{it}\right) g(e^{it})\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{r \to 1 \\ \theta \to t_0}]{} ?$$

נניח ש־$\theta = t_0$ אזי

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(re^{it_0}, e^{it}) g(e^{it})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1 + re^{i(t_0 - t)}}{1 - re^{i(t_0 - t)}}\right) g(t)\,\mathrm{d}t$$

נשים לב שאם נסמן $t' = t_0 - t$ נקבל

$$Re\left(\frac{1 + re^{it'}}{1 - re^{it'}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t') + r^2}$$

וזה בעצם גרעין פואסון! כאשר $t' = 0$ זה בעצם $\frac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r}$ וכאשר $r \to 1$ זה מתפוצץ.

סוף הרצאה 20 – 16/06

3.3 שיטת Perron לפתרון בעיית דיריכלה

המטרה שלנו היא לפתור את בעיית דיריכלה עבור משוואת לפלס $\Delta u|_\Omega = 0$ כאשר $u|_{\partial\Omega} = g$.

הגדרה 3.12 פונקציה תת־הרמונית

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום (קבוצה פתוחה וקשירה), $v \in C(\Omega)$ תקרא תת־הרמונית ב־Ω אם לכל $B \subseteq \Omega$ כדור פתוח כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$ ולכל $h \in C\left(\overline{B}\right)$ הרמונית ב־B המקיימת $v|_{\partial B} \leq h|_{\partial B}$ מתקיים $v \leq h$ ב־B.

טענה 3.13 הגדרה שקולה לפונקציה תת־הרמונית במימד אחד

במימד אחד פונקציה v היא תת־הרמונית אם ורק אם v קמורה.

הערה

כל פונקציה הרמונית היא תת־הרמונית.

משפט 3.14 עיקרון המקסימום החזק עם פונקציות תת־הרמוניות

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ו־$u \in C(\Omega)$ תת־הרמונית ב־Ω. אם u מקבלת מקסימום ב־Ω אז u קבועה ב־Ω.

הוכחה: נסמן $m = \max_{x\in\Omega} u(x)$ ונביט בקבוצה

$$A = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$$

A קבוצה סגורה ולא ריקה ונראה ש־A פתוחה.
יהי $x_0 \in A$ כך ש־$u(x_0) = M$ ויהי $\overline{B} = \overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$.
תהיי h הרמונית ב־B כך ש־$h|_{\partial B} = v|_{\partial B}$ אנו יודעים ש־$u \leq h$ ובפרט $m = u(x_0) \leq h(x_0)$ ו־$h|_{\partial B} = u|_{\partial\Omega}$.
אם־כך, h הרמונית ב־B רציפה ב־$\overline{B}$, $h \leq M$ על $\overline{B}$ ו־$h(x_0) = M$ אז מעיקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות $h \leq M$ ב־B וכן מאחר ש־$h(x_0) = M$ נקודה פנימית שבה מתקבל המקסימום ונובע כי $h \equiv |_B\ M$ אבל לכן מרציפות h נובע ש־$h \equiv |_{\overline{B}}\ M$ אבל $u|_{\partial B} = h|_{\partial B} = M$.
מאחר שהרדיוס r שרירותי נקבל ש־$u \equiv M|_B$ לכל כדור.
אז נובע מכך ש־A פתוחה אבל היא גם סגורה ולא ריקה ולכן מקשירות Ω נסיק ש־$A = \Omega$. □

משפט 3.15 עקרון המקסימום החלש לפונקציות תת־הרמוניות

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום ותהיינה $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ תת־הרמונית, $h \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ הרמונית ב־Ω.
אם $u \leq h$ על $\partial\Omega$ אז $u \leq h$ ב־Ω.

הערה

למשל, אם $u \leq M$ על $\partial\Omega$ אזי $u \leq M$ ב־Ω (זה בעצם ניסוח שקול).

הוכחה: נביט ב־$w = u - h$ והיא תת־הרמונית (מהגדרה ואריתמטיקה של פונקציות תת־הרמוניות).
תהיי $x_0 \in \overline{\Omega}$ כך ש־$w(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} w$.
נתון ש־$w \leq 0$ על $\partial\Omega$ ונחלק למקרים

1. אם $x_0 \in \Omega$ אז w קבועה על $\overline{\Omega}$ מעיקרון המקסימום החזק ולכן $w \leq 0$ על $\partial\Omega$ גורר ש־$w \leq 0$ ב־Ω
2. אם $x_0 \in \partial\Omega$ אז

$$\forall x \in \overline{\Omega},\ w(x) \leq w(x_0) \leq 0$$

כאשר האי־שיוויון הראשון זה כי x_0 נקודת מקסימום והשני זה ש־$x_0 \in \partial\Omega$.

בכל מקרה $w \leq 0$ ב־Ω כלומר $u \leq h$ ב־Ω. □

טענה 3.16

אם $u_1, u_2, ..., u_N$ תת־הרמוניות ב־Ω אז $v = \max\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ היא תת־הרמונית ב־Ω.

הוכחה: יהי $\overline{B} \subseteq \Omega$ ו־$h \in C\left(\overline{B}\right)$ הרמונית ב־B כך ש־$u|_{\partial B} \leq h|_{\partial B}$.
אז מתקיים לכל $1 \leq j \leq n$ גם ש־$u_j\ |_{\overline{\Omega}} \leq h|_{\overline{\Omega}}$ אבל u_j תת־הרמונית ולכן $u_j \leq h$ ב־B וזה נכון לכל j ולכן גם $u \leq h$. □

הרעיון של שיטת Perron זה לחפש פונקציות תת־הרמוניות v שמקיימות $v|_{\partial\Omega} \leq g$ ופותרת את מערכת המשוואה הבאה ב־Ω

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

אז נגדיר

$$u^{per}(x) = \sup\left\{v(x) \mid v|_{\partial\Omega} \leq g, v \in C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ sub-harmonic}\right\}$$

הגדרה 3.17 **ההרמה ההרמונית**

תהיי v תת־הרמונית ב־Ω ו־$\overline{B} \subseteq \Omega$. נגדיר את ההרמה ההרמונית של v לכדור B ב־$\overline{v}^B$ כך ש־$\overline{v}^B \in C(\Omega)$ המוגדרת על־ידי

$$\overline{v}^B(x) = \{v(x) \quad x \notin B$$

כאשר $h \in C\left(\overline{B}\right)$, $h|_{\partial B} = v|_{\partial B}$ ו־h הרמונית ב־B.

טענה 3.18

$\overline{v}^B$ היא תת־הרמונית ב־Ω.

הוכחה: יהי $\overline{B'} \subseteq \Omega$ כדור סגור כלשהו ותהיי $h \in C\left(\overline{B'}\right)$ הרמונית כך ש־$\overline{v}^B|_{\partial B'} \leq h|_{\partial B'}$.
נרצה להראות ש־$\overline{v}^B \leq h$ ב־B'.
נראה תחילה ש־$\overline{v}^B = v$ ב־$B' \setminus B$ ונשים לב ש־$v \leq \overline{v}^B$ שכן $v|_{\partial B'} \leq \overline{v}^B|_{\partial B'}$ ומאחר ש־v תת־הרמונית נקבל ש־$v \leq h$ ב־B' ובפרט $\overline{v}^B = v \leq h$ ב־$B' \setminus B$.
נראה ש־$\overline{v}^B \leq h$ ב־$B' \cap B$, מתקיים

$$\partial B' \cap B = \underbrace{\left(\partial B' \cap \overline{B}\right)}_{I} \cup \underbrace{\left(\overline{B'} \cap \partial B\right)}_{II}$$

ב־I מתקיים $\overline{v}^B \leq h$ שכן $\partial B' \cap \overline{B} \subseteq \partial B'$ ונתון ש־$\overline{v}^B \leq h$ על $\partial B'$.
ב־II מתקיים ש־$\overline{B'} \cap \partial B \subseteq \overline{B'} \setminus B$ ולכן $\overline{v}^B$ מתלכדת עם v ב־II וראינו ש־$v \leq h$ ב־B' ולכן גם ב־$B' \setminus B$ ועל־כן $\overline{v}^B \leq h$. □

משפט 3.19

תהיי u_n סדרה חסומה של פונקציות הרמוניות ב־Ω. אזי קיימת תת־סדרה u_{n_k} המתכנסת לפונקציה הרמונית ב־Ω (ההתכנסות היא במידה שווה על כל תת־קבוצה קומפקטית של Ω).

הוכחה: טבעי לרצות להשתמש במבחן ארצלה־אסקולי מפונקציונלית.
נביט ב־$\partial_i u$ (כלומר $\frac{\partial u}{\partial x_i}$) והיא גם פונקציה הרמונית ולכן לכל $x_0 \in \Omega$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\partial_i u(x_0) &= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} (\partial_i u)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x,r)} (\partial_i u)(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{|B(x_0,r)|}\cancel{\int_{B(x,r)} u(\partial_i 1)\,\mathrm{d}x} + \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} u\cdot 1\cdot n_i\,\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_{n-1} \\
&\leq \frac{|\partial B(x_0,r)|\cdot \max|u|}{|B(x_0,r)|} \\
&\leq \frac{C_n r^{n-1}}{C'_n r^n}\cdot \max_{\overline{\Omega}}|u| \\
&= \frac{\max_{\overline{\Omega}}|u|}{r}
\end{aligned}$$

כאשר r קטן דיו עבור $r < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ עבור $K \subseteq \Omega$ קומפקטית.
אז לכל $x \in K$ מתקיים $|(\partial_i u_n)(x)| \leq \frac{M}{r}$ ולכן

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \max_K |\nabla u_n|\cdot|x-y| \leq \frac{M}{r}|x-y|$$

אז u_n רציפה במידה שווה ואפילו ליפשיצית והיא לא תלויה ב־n ולכן רציפה במידה אחידה וממשפט ארצלה־אסקולי נקבל שקיימת תת־סדרה של u_{n_k} שמתכנסת במידה שווה על K והגבול הזה הרמוני כי הוא גבול במידה שווה, יחד עם טיעון אלכסון $\Omega = \bigcup K_n$ נקבל את הנדרש. □

סוף הרצאה 21 – 23/06

הערה

לא דיברנו על זה (אבל כן ראינו ביריעות) ש־$v \in C^2(\Omega)$ תת־הרמונית אם ורק אם $\Delta v \geq 0$ ולכן יש הרבה מאוד פונקציות תת־הרמוניות וקל לייצר כאלו.

משפט 3.20 **משפט Perron**

נגדיר

$$S_g := \left\{v \in C\left(\overline{\Omega} \mid v \text{ sub-harmonic}, v|_{\partial\Omega} \leq g\right)\right\}$$
$$u^{per} := \sup\left\{v \mid v \in S_g\right\}$$

אז u^{per} הרמונית ב־Ω (כלומר מועמד רציני לפיתרון), כאשר הגדרנו

$$u^{per}(x) = \sup\left\{v(x) \mid v|_{\partial\Omega} \leq g, v \in C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ sub-harmonic}\right\}$$

הוכחה: תהיי $y \in \Omega$ ולכן קיימת סדרה $v_n \in S_g$ כך ש־$v_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{per}(y)$.
נשים לב ש־$v_n \leq \sup_{\partial\Omega} g$ מעיקרון המקסימום.
נגדיר $\tilde{v}_n := \max\{v_n, \inf_{\partial\Omega} g\}$ ונשים לב ש־$\tilde{v}_n \in S_g$ ומקיימת

$$\inf g \leq \tilde{v}_n \leq \sup g$$
$$v_n(y) \leq \tilde{v}_n(y) \underset{\tilde{v}_n \in S_g}{\leq} u^{per}(y)$$

נשים לב ש־$v_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{per}(y)$ ולכן מכלל הכריך מתקיים $\tilde{v}_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{per}(y)$.
מצאנו סדרה חסומה של פונקציות ב־S_g כך שבנקודה $y \in \Omega$ מתקיים $\tilde{v}_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{per}(y)$.
יהי $B = B(y,r) \subseteq \Omega$ כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$, נשים לב שעם ההרמה ההרמונית $\tilde{v}_n \leq \overline{\tilde{v}}_n^B$ ולכן $\overline{\tilde{v}}_n^B \in S_g$ ואז נקבל את שרשרת אי־השיוויונות

$$\tilde{v}_n \leq \overline{\tilde{v}}_n^B \leq u^{per}$$

ולכן בנקודה y נקבל $\overline{\tilde{v}}_n^B(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{per}(y)$.
אז $\left(\overline{\tilde{v}}_n^B\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה של פונקציות הרמוניות בכדור B וממשפט 3.19 קיימת תת־סדרה $\overline{\tilde{v}}_{n_k^B}$ שמתכנסת ב־B לפונקציה הרמונית h_v ואז נקודתית ב־B מתקיים

$$\overline{\tilde{v}}_{n_k^B} \xrightarrow[k\to\infty]{} h_v$$
$$\overline{\tilde{v}}_{n_k^B}(y) \xrightarrow[k\to\infty]{} u^{per}$$
$$\overline{\tilde{v}}_{n_k^B}(y) \xrightarrow[k\to\infty]{} h_v(y)$$

קיבלנו פונקציה הרמונית h_v ב־B כך ש־$h_v(y) = u^{per}(y)$ ונרצה להראות ש־$h_v \equiv u^{per}$ ב־B ונשים לב ש־$h_v \leq u^{per}$ ב־B.
נניח בשלילה שקיימת $z \in B$ כך ש־$h_v(z) < u^{per}(z)$. תהיי $w_k \in S_g$ כך ש־$w_k \geq \overline{\tilde{v}}_{n_k^B}$ ו־$w_k(z) \to u^{per}(z)$.
קיימת סדרה $\hat{w}_k \in S_g$ כך שהתנאי השני מתקיים (פשוט מהגדרת הסופרמום) ונגדיר את w_k על־ידי $w_k := \max\left\{\hat{w}_k, \overline{\tilde{v}}_{n_k^B}\right\} \in S_g$ ולכן

$$\overline{\tilde{v}}_{n_k^B} \leq w_k \leq u^{per}$$
$$w_k(z) \xrightarrow[k\to\infty]{} u^{per}(z)$$
$$w_k(y) \xrightarrow[k\to\infty]{} u^{per}(y)$$

ושוב עם ההרמה ההרמונית, $\overline{w}_k^B \in S_g$ ומתקיים

$$\overline{\tilde{v}}_{n_k^B} \leq w_k \leq \overline{w}_k^B \leq u^{per}$$

נוכל למצוא תת־סדרה מתכנסת $\overline{w}_{k_n}^B$ ב־B לפונקציה הרמונית h_w.
קיבלנו שתי פונקציות הרמוניות ב־B המקיימות $h_v \leq h_w$ ו־$h_v(y) = h_w(y) = u^{per}(y)$ ויתר על־כן $h_v(z) < h_w(z) = u^{per}(z)$ (מהנחת השלילה) וזאת כמובן סתירה כי אם נסתכל על $h_v - h_w \leq 0$ אבל ב־y היא מתאפסת וב־z היא קטנה ממש מאפס והיא מקבלת מקסימום בנקודה פנימית אבל פונקציה הרמונית מקבלת מקסימום בנקודה פנימית אם ורק אם היא קבועה (מעיקרון המקסימום החזק) ועל־כן, סתירה.
כלומר, $h_v = u^{per}$ ב־B ולכן u^{per} הרמונית ב־B ומשרירותיות y ו־B נקבל ש־u^{per} הרמונית ב־Ω. □

3.4 תנאי שפה

משפט 3.21

אם Ω הוא תחום C^2 ו־$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ רציפה אז ניתן לפתור באופן יחיד את בעיית דיריכלה ב־Ω

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

נשים לב שהפיתרון הוא יחיד שכן אם יש שני פתרונות ונסתכל על ההפרש שלהם מעיקרון המקסימום והמינימום (זה מתאפס על השפה).
כיצד נפתור את הבעיה הכללית (בעיית פואסון)?

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

נוכל לפרק את הבעיה לשתיים בעזרת מה שראינו לעיל. נגדיר $u_1 := \Gamma * f$ (קונבולוציה עם הפוטנציאל הניוטוני), כך שמתקיים $\Delta u_1 = f$ בתוך Ω. כעת, נגדיר את u_2 להיות הפתרון לבעיית דיריכלה ההרמונית הבאה:

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \in \Omega \\ u_2|_{\partial\Omega} = g - u_1|_{\partial\Omega} & \in \partial\Omega \end{cases}$$

מאחר ש־u_2 פותרת את משוואת לפלס עם תנאי שפה רציף (מעצם רציפות g ו־u_1), ראינו שקיים לה פתרון יחיד.
אז, הפונקציה $u = u_1 + u_2$ היא הפתרון הנדרש, שכן

$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2 = f + 0 = f$$
$$u|_{\partial\Omega} = u_1|_{\partial\Omega} + u_2|_{\partial\Omega} = u_1|_{\partial\Omega} + g - u_1|_{\partial\Omega} = g$$

סוף הרצאה 22 – 24/06